

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 8 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(A) (一般)

研究期間：2010～2014

課題番号：22244002

研究課題名(和文)高次元代数多様体の標準因子の研究

研究課題名(英文)Study of canonical divisors on higher dimensional algebraic variety

研究代表者

川又 雄二郎 (Kawamata, Yujiro)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：90126037

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 35,100,000円

研究成果の概要(和文)：トーリック多様体の導来圏が極小モデル・プログラムによって変化する様子を記述しこの場合のDK予想を証明した。また因子抽出による導来圏の変化も記述し、有限アーベル群に対する導来的マッケイ対応を証明した。2次元の一般線形群に含まれる任意の有限群に対しても導来的マッケイ対応を証明し半直交分解の表示を得た。

アバundance予想を数値的小平次元が0の場合に証明した。森夢空間がカラビヤウ型になることと、コックス環が対数的標準特異点を持つことが同値であることを証明した。ホッジ束の半正値定理をファイバーが可約である場合に拡張した。因子の空間を極小モデルおよび標準モデルに付随して分割することに関する定理を得た。

研究成果の概要(英文)：I described the change of the derived categories under the minimal model program in the case of toric varieties, and proved the DK conjecture in this case. I gave similar description for the divisorial extractions, and proved the derived McKay correspondence for finite abelian groups. I also proved the derived McKay correspondence for any finite subgroup of general linear group in the case of dimension 2, and described the semi-orthogonal complements.

I proved the abundance conjecture in the case of numerical Kodaira dimension 0. I proved that a Mori dream space is of Calabi-Yau type if and only if the Cox ring has only log canonical singularities. I extended the semi-positivity theorem of the Hodge bundle in the case of reducible fibers. I described the decomposition of the space of boundary divisors according to the minimal models and the canonical models.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数多様体 標準因子 導来圏 極小モデル トーリック多様体 DK予想 アバundance予想

1. 研究開始当初の背景

Birkar-Cascini-Hacon-McKernan により標準環の有限生成定理が証明され、フリップの存在定理および一般型の代数多様体に対する極小モデルの存在定理が証明された。極小モデル理論において残された重要問題は、フリップの終結予想とアバダンス予想となった。

一方、導来圏理論と極小モデル理論の類似性が近年注目され、DK 予想などの新しい問題が提起された。

2. 研究の目的

極小モデル理論で残された重要問題であるアバダンス予想「極小モデル上の(対数的)標準因子は半豊富である」にアプローチする。また、極小モデル理論からみた導来圏理論の重要問題である DK 予想「双有理同値な代数多様体において、標準因子が同値ならば導来圏は同値になり、標準因子の不等式があれば導来圏の半直交分解がある」にアプローチする。

3. 研究の方法

アバダンス予想を、数値的小平次元が0の場合や、非消滅予想を仮定したもとで考えるなど、特別な場合に証明するために、ホッジ理論の応用を探る。とくにシンプソンの理論を応用する。

DK 予想をトーリック多様体という特別な場合に証明するために、導来圏の具体的な表示を組み合わせて論的に計算する。

4. 研究成果

アバダンス予想を数値的小平次元が0の場合に証明した。シンプソンによる平坦ベクトル束の記述を応用した。

トーリック多様体の導来圏が極小モデル理論における双有理変換によってどのように変化するかを記述し、この場合の DK 予想を証明した。また、divisorial extraction による導来圏の変化も記述し、有限アーベル群に対する導来的マッカイ対応を証明した。さらに、2次元の場合には $GL(2, \mathbb{C})$ に含まれる一般の有限群に対して導来的マッカイ対応を証明し、半直交分解の表示を得た。

そのほか関連する話題として、以下の結果を得た。森夢空間がカラビヤウ型(またはファノ型)になることと、コックス環が対数的標準特異点(または対数的末端特異点)を持つことが同値であることを証明した。

ホッジ束の半正值定理を、ファイバーが可約である場合に拡張した。

極小モデルおよび標準モデルに付随して R 因子の空間を部屋と壁に分割することに関する定理を得た。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計8件)

Yujiro KAWAMATA. Derived categories of toric varieties III. *European Journal of Mathematics*, 2 (2016), 196-207. DOI: 10.1007/s40879-015-0065-1 査読あり。

Yujiro KAWAMATA and Shinnosuke OKAWA. Mori dream spaces of Calabi-Yau type and the log canonicity of the Cox rings. *J. Reine Angew. Math.* 701 (2015), 195-203. DOI 10.1515/crelle-2013-0029 査読あり。

Yujiro KAWAMATA. Variation of mixed Hodge structures and the positivity for algebraic fiber spaces. *Algebraic Geometry in East Asia - Taipei 2011. Adv. St. Pure Math.* 65(2015), 27-58. 査読あり。

Yujiro KAWAMATA. Hodge theory on generalized normal crossing varieties. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 57-1(2014), 175-189. 査読あり。

Yujiro KAWAMATA. On the abundance theorem in the case of numerical Kodaira dimension zero. *Amer. J. Math.* 135(2013), no. 1, 115-124. 査読あり。

Yujiro KAWAMATA. Derived categories of toric varieties II. *Michigan Math. J.* 62-2(2013), 353-363. 査読あり。

Yujiro KAWAMATA. Remarks on the cone of divisors. Classification of Algebraic Varieties, European Math. Soc., 2011, 317-325. 査読あり。

Yujiro KAWAMATA. Semipositivity theorem for reducible algebraic fiber spaces. Pure App. Math. Quarterly, 7-4(2011), 1427-1447. 査読あり。

[学会発表](計25件)

Yujiro KAWAMATA. On some derived McKay correspondences. Categorical and Analytic Invariants in Algebraic Geometry II. Kavli IPMU, University of Tokyo, November 16-20, 2015.

Yujiro KAWAMATA. Multi-pointed NC deformations and CY 3folds. Workshop on Algebraic Geometry. Fudan University, Shanghai, China, October 29-November 1, 2015.

Yujiro KAWAMATA. Multi-pointed NC deformations and CY 3folds. Categorical and Analytic Invariants in Algebraic Geometry I. Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia, September 14-18, 2015.

Yujiro KAWAMATA. Derived McKay correspondences for finite abelian group quotients. Derived Categories and Birational Geometry. University of Warwick, UK, June 1-6, 2015.

Yujiro KAWAMATA. Derived categories of toric varieties. Algebraic

Geometry and Applications to Physics and Dynamics. Euler International Mathematical Institute, Saint Petersburg, Russia, May 25-29, 2015.

Yujiro KAWAMATA. Derived McKay correspondences for finite abelian group quotients. University of Beijing, China, April 29, 2015.

Yujiro KAWAMATA. Derived categories of toric varieties. University of Nice, France, March 26, 2015.

Yujiro KAWAMATA. Remarks on non-commutative deformations of sheaves. Algebraic Geometry. University of Bayreuth, Germany, March 12-14, 2015.

Yujiro KAWAMATA. Derived categories of toric varieties. National Taiwan University, Taipei, Taiwan, September 29, 2014.

Yujiro KAWAMATA. Minimal models and derived categories of toric varieties. National Chenggong University, Tainan, Taiwan, September 22, 2014.

Yujiro KAWAMATA. On special cases of DK conjecture and derived McKay correspondence. Complex Analysis and Geometry, Freiburg University, Germany, August 21-23, 2014.

Yujiro KAWAMATA. A remark on derived McKay correspondence.

Chengdu workshop on algebraic geometry, Sichuan University, China, May 19-22, 2014.

Yujiro KAWAMATA. Derived category of a weighted projective space. Birational Geometry of Complex Algebraic Varieties dedicated to F. Campana, Luminy, France, October 7-11, 2013.

Yujiro KAWAMATA. The derived category of toric varieties. University of Milano, Italy, October 1, 2013.

Yujiro KAWAMATA. Toric MMP and SOD. PRAGMATIC 2013, University of Catania, Italy, September 16-27, 2013.

Yujiro KAWAMATA. On tilting generators. Classification of Algebraic Varieties and Related Topics, Cetraro, Italy, September 8-15, 2013.

Yujiro KAWAMATA. Derived categories in algebraic geometry. The 6th Pacific Rim Conference on Mathematics, Sapporo, July 3-6, 2013.

Yujiro KAWAMATA. Some remarks on tilting generators. Birational Geometry and GIT, Wien, Austria, May 21-24, 2013.

Yujiro KAWAMATA. Minimal models and Fourier-Mukai partners. Conference on complex geometry in memory of Hans Grauert, University of Goettingen, Germany, September 17-20, 2012.

Yujiro KAWAMATA. Derived categories from the viewpoint of the minimal model program. Algebraic and Complex Geometry, Hannover, Germany, September 10-14, 2012.

²¹ Yujiro KAWAMATA. Birational geometry and derived categories. LMS-EPSRC Durham Symposia "Interactions of birational geometry with other fields", UK, July 2-7, 2012.

²² Yujiro KAWAMATA. Derived categories in algebraic geometry. Algebraic Geometry Conference, Chulalongkorn University, Bangkok, Thailand, December 19-23, 2011.

²³ Yujiro KAWAMATA. On derived categories of toric varieties. Algebraic Geometry in East Asia 2011, National Taiwan University, Taipei, November 16-20, 2011.

²⁴ Yujiro KAWAMATA. A remark on the abundance conjecture. Birational Geometry Day, DPMMS, University of Cambridge, UK, 12 October 2011.

²⁵ Yujiro KAWAMATA. Triangulated Categories in Algebraic Geometry. Triangulated categories and applications, Banff International Research Station, Canada, June 12-17, 2011.

<http://www.birs.ca/events/2011/5-day-workshops/11w5009/videos>

{ 図書 } (計 2 件)

川又雄二郎 高次元代数多様体論. 岩

波書店, 2014 年 7 月, 304+x pp. ISBN
978-4-00-007598-5.

Yujiro KAWAMATA (ed.) Derived
Categories in Algebraic Geometry. EMS
Series of Congress Reports, European
Mathematical Society, January 2013, 354
pages. ISBN 978-3-03719-115-6. DOI
10.4171/115.

〔産業財産権〕
出願状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
取得年月日 :
国内外の別 :

〔その他〕
ホームページ等
http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/~kawamata_lab/

6. 研究組織

(1) 研究代表者

川又 雄二郎 (KAWAMATA, Yujiro)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号 : 90126037

(2) 研究分担者

()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

()

研究者番号 :