

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 8 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(A)

研究期間：2010～2014

課題番号：22244006

研究課題名(和文) 特異点をもつ曲線，曲面と超曲面の幾何学

研究課題名(英文) Geometry of curves, surfaces and hypersurfaces with singularities

研究代表者

梅原 雅顕 (Umehara, Masaaki)

東京工業大学・情報理工学(系)研究科・教授

研究者番号：90193945

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 23,800,000円

研究成果の概要(和文)：筆者らが考え出した接続接束の概念の応用として，特異点をもつ3次元Euclid空間に，合計4個のガウス・ボンネ型の公式を見だし，多くの応用を与えた．また折り目特異点をもつ空間的極大曲面が，時間的な曲面への自然な解析的拡張をもつ，という事実に着目し，3重周期的なシュワルツD型の極大曲面について，実際にその解析的延長が埋め込みになることを示した．また，平均曲率関数が符号変化をしないはめ込まれた曲面のクラスにおいて3次元球面の中におけるクリフォード・トーラスの剛性を示した．このほか平面曲線の特異点についても変曲点に関する Bol の予想の簡単な証明を与えるなど，いくつかの新しい結果を得た．

研究成果の概要(英文)：Using the concept of coherent tangent bundles, we (the head investigator and the research group) found four new Gauss-Bonnet type formulas for closed surfaces with singularities in Euclidean 3-space. Using the fact that a spacelike maximal surface with fold singularities has an analytic extension across those singularities, we showed that the analytic extensions of the triply-periodic Schwarz D type maximal surfaces are all embedded. In a joint work with Yoshihisa Kitagawa, we proved that the Clifford torus is rigid in the class of immersed flat tori whose mean curvature functions do not change sign. Moreover, we obtained some interesting results for plane curves. For example, a simplification of the proof of Bol's conjecture on sextactic points was discovered.

研究分野：微分幾何学

キーワード：特異点 ガウス曲率 微分幾何学 半正定値計量 曲面 曲線 超曲面

1. 研究開始当初の背景

本研究は、筆者が代表であった

基盤研究 A (一般) 19204005
特異点をもつ曲線と曲面の幾何学
(H19 年度--平成 21 年度)

の継続研究課題である。上記の期間の研究で曲線・曲面に関する特異点の微分幾何学的研究が、ほぼ軌道に載ったこともあり、研究範囲を、より次元の高い超曲面も含めることにした。特に上記研究課題において佐治氏と山田氏との共同研究により、超曲面に現れる代表的な特異点の族である A 型の特異点の便利な判定法を得たことが、今回の超曲面への研究発展の鍵となった。今回の申請にあたっては、特異点論と微分幾何学のよりいっそうの研究交流を目指す研究計画を立てた。

2. 研究の目的

本研究は、ここ数年の筆者等の特異点をもつ曲面の研究の発展である。特異点論では従来おもに、特異点の位相幾何学的なふるまいに注目してきたが、本研究では「特異点に曲がり具合あるいは尖り具合を測る新しい不変量を導入し、波面としての超曲面の位相との関係を調べる」ことを目標とする。具体的には、以下の 4 つのテーマについて研究を行う。

1. 特異点をもつ曲面および超曲面の微分幾何学の構築。
2. 波面の特異点と位相に関する研究、およびその関連分野への応用。
3. Euclid 空間および双曲型空間における完備かつ有界な極小曲面の研究。
4. 平面単純閉曲線の 4 頂点定理の現代的再解釈と曲面への応用。

これらは、相互に有機的に結びついており、各テーマについて年度ごとに目標を設定し、段階的に最終目標の達成をめざす。

3. 研究の方法

(1) [特異点をもつ曲面および超曲面の微分幾何学の構築]

研究代表者は、研究分担者の山田、橋本、間下、連携研究者の佐治、阿賀岡、宮岡の協力のもと、超曲面の A 型特異点に、特異主曲率の概念を定義し、特異点のまわりの断面曲率の挙動を解析する。また連接接束の概念を用いて、山田氏・佐治氏と一緒に連携研究者の満洲、後藤らの協力のもと曲面や超曲面について、新たなガウス・ボンネ型の定理の樹立をめざす。

(2) [波面の特異点の位相に関する研究およびその関連分野]

研究代表者は、連携研究者のラスマン、藤森と一緒に、解析的手法に精通している連携研究者の小磯の協力のもと、3 次元時空においてカスプ辺やツバメの尾などの特異点を有する 3 重周期的な極大曲面の構成を行う。同時に研究協力者の Yang 氏(韓国,高麗大学)

とも連携して、空間的極大曲面の時間的極小曲面への型変化について研究を行う。また、研究代表者は、3 次元 de Sitter 空間の中で、特異点を許容する平均曲率 1 の曲面と、リーマン面の双曲計量との関係を調べる研究を、連携研究者の國分、川上、藤森、ラスマンと行う。

(3) [Euclid 空間あるいは双曲型空間における完備かつ有界な極小曲面の研究]

研究代表者は、分担者の山田と共に、研究協力者の Martin 氏(スペイン,グラナダ大学)と連携して、3 次元双曲型空間における平坦な波面で、完備かつ有界なものの構成をめざす。手法としては、関数論のルンゲの定理を駆使する方法を用いる。

(4) [平面単純閉曲線の 4 頂点定理の現代的再解釈と曲面への応用]

連携研究者の北川は、3 次元球面の平坦トーラスが、ある種の条件を満たす「2 次元球面上の閉曲線の対」と 1 対 1 に対応することを示した。この対応を用いて、研究代表者は、北川氏との共同研究で、平均曲率関数が符号を変えないときには、はめ込みの範囲まで Clifford トーラスの剛性が保存されることを示す研究を行う。

また、研究代表者は、以前に、研究協力者の Thorbergsson 氏(ドイツ,ケルン大学)との共同研究で intrinsic circle system の理論を構築したが、その共同研究の延長として、今回は、射影平面における平面曲線の 2 次曲線との接触に関する応用について研究を行う。

以上 4 項目の研究について、研究代表者の梅原および分担者の山田、大仁田、間下、橋本らは、それぞれ国内外において、当該テーマに関係する研究集会等を主催し、研究の活性化と研究交流の推進を図る。

4. 研究成果

(1) [特異点をもつ曲面および超曲面の微分幾何学の構築]

このテーマの研究では以下の成果を得た。研究代表者は、分担者の山田、および連携研究者の佐治との共同研究で、 n 次元 Euclid 空間の閉超曲面が A 型の特異点のみを有するとき、ある種のガウス・ボンネ型の指数公式を証明し、さまざまな応用を与えた。この成果は論文にまとめたが現在査読中である。

研究代表者は、分担者の山田を含む 5 名の共同研究において、交叉帽子の内的な不変量を系統的に見つけ出すアルゴリズムを見つけた。さらに交叉帽子の等長変形の具体例を与えて内的でない不変量も同時に見だし、1 つの論文にまとめた。

これに関連して、研究代表者は、山田氏、直川氏との共同研究として、3 次元 Euclid 空間のカスプ辺の等長変形に関する研究を行い、一般的なカスプ辺は、互いに等長的で特異点集合も共通である、互いに合同でないもう一つのカスプ辺をもつことを示した。

(2) [波面の特異点と位相に関する研究, およびその関連分野への応用]

このテーマについては以下の成果を得た. 3点に円錐的特異点をもつ球面上の定曲率1の曲面の分類を用いて, 研究代表者は, 分担者の山田, 連携研究者の國分, 藤森, ラスマン, 川上との共著論文で3次元双曲型空間の3つのエンドをもつ平均曲率1の曲面の完全な分類を与えた(文献[9]).

この研究に関連して, 与えられた双曲的ガウス写像をもつ3次元 de Sitter 時空の平均曲率1の曲面と, ある種の特異点を許容するリーマン面上の双曲計量との間に, 自然な全単射が存在することを, 研究代表者は, 分担者の山田, 連携研究者の國分, 藤森, ラスマン, 川上との共同研究で示した(文献[3]).

研究代表者は, 分担者の山田, 連携研究者のラスマン, 藤森, そして研究協力者の Yang との共同研究で, 数年前の同じメンバーによる共同研究で構成した3次元時空の3重周期的なシュワルツ型の極大曲面が, 実は, 時間的極小曲面への実解析的延長をもち, 曲面は全体として埋め込みになっていることを証明した. この研究に関連して, 上記5人に加えて, 韓国から3名を加えた8人の共著論文として, 3次元時空において, 光的直線上で型変化をする極大曲面を巾級数の方法を用いて構成した. このような曲面の存在は Klyachin により可能性としてのみ指摘されていたが, 本研究でその存在が初めて明らかになった. さらに, 同じメンバー8人で, 3次元時空の空間的極大曲面が, 時間的極小曲面へ型変化をするメカニズムを解明し, さらにその流体力学への応用を与えた.

(3) [Euclid 空間および双曲型空間における完備かつ有界な極小曲面]

このテーマについては以下の成果を得た.

研究代表者は, 分担者の山田, および研究協力者の Martin と共著で, 3次元双曲型空間の弱完備かつ平坦な波面で, 2つの双曲的ガウス写像が共に有界であるものを構成した(文献[1]). この状況で筆者等は, さらに曲面自身が有界であるものの存在を期待しているが, まだ最終目標には至っていない.

(4) [平面単純閉曲線の4頂点定理の現代的再解釈と曲面への応用]

研究代表者は, 連携研究者の北川と共に, 3次元球面のクリフォード・トーラスが, 平均曲率が符号を変えないはめ込みのクラスにおいて剛性をもつことを示した(文献[11]).

研究代表者は, 当時修士の学生であった芝翔平氏と平面曲線のカスプと変曲点におけるアフィン曲率の振る舞いに関する研究を行った(文献[7]). この研究に関連し, 研究代表者は, 以前に代表者が Thorbergsson 氏と証明した sextactic 点に関する Bol 予想

の簡単な別証明を与えることに成功した(文献[12]).

研究代表者は, 研究協力者の Thorbergsson 氏と, 数年前に Foreman 氏が発表した射影不変な新型の4頂点定理の精密化とその双対版を与える研究を行った(文献[5]).

研究代表者は, 当時, 東工大の学部4年生であった郷内氏との共同研究で, 丁度4個のカスプをもつ卵形線の縮閉線の形状の分類を行った.

以上の研究において, 研究代表者は2012年の日本数学会の総合講演において, 筆者等の研究についての総合的な研究報告を行った. また, 代表者は, 期間中2回, 2011年と2012年の5月に, Pedit 氏と Abreasch 氏との共同で, ドイツの Oberwolfach 数学研究所において, 曲面の微分幾何学に関する国際研究集会を開催した. また, 2013年2月には, 東京工業大学において, 分担者の山田氏, Rossmann 氏, およびグラナダ大学の Martin 氏らと, スペインと日本の友好国際研究集会を開催し, 当該研究テーマについて, 参加者らと研究連絡および討論を行った. 一方, 研究分担者の間下氏は, 毎年11月に部分多様体の研究集会を開催し, 分担者の橋本氏は, 名城大学で毎年3月に, 同じく部分多様体に関する研究集会を開催し, それぞれ, 本研究テーマに関連する内容について, 研究交流を行った.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計17件)

[1] F. Martin, M. Umehara and K. Yamada, Flat surfaces in hyperbolic 3-space whose hyperbolic Gauss maps are bounded}, Rev. Mat. Iberoam. 30 (2014) 309–316, (doi 10.4171/rmi/779), 査読有.

[2] L. Ferrer, F. Martin, M. Umehara and K. Yamada, A construction of a complete bounded null curves in \mathbb{C}^3 , Kodai Math. J. 37 (2014) 59--96, (doi:10.2996/kmj/1396008249), 査読有.

[3] S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossmann, M. Umehara and K. Yamada, Hyperbolic Metrics on Riemann surfaces and space-like CMC-1 surfaces in de Sitter 3-space, M. Sanchez et al (eds), Recent Trends in Lorentzian Geometry, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 26 (2013) 1-48, (doi:10.1007/978-1-4614-4897-6-1), 査読有.

[4] S. Ohno, T. Ozawa and M. Umehara, Closed planar curves without inflections,

Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013) 651–665, (doi.org/10.1090/S0002-9939-1991-1043406-7) , 査読有.

[5] S. Fujimori, Y. W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossmann, H. Shin, H. Takahashi, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, Zero mean curvature surfaces in L^3 containing a light-like line, C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 350 (2012) 975–978, (doi.org/10.1016/j.crma.2012.10.024) , 査読有.

[6] G. Thorbergsson and M. Umehara, A refinement of Foreman's four vertex theorem and its dual version, Kyoto J. Math. 52 (2012) 743–758, (doi:10.1215/21562261-1728848) , 査読有.

[7] S. Shiba and M. Umehara, The behavior of curvature functions at cusps and inflection points, Differential Geometry and its Applications 30 (2012) 285–299, (doi:10.1016/j.diffgeo.2012.04.001) , 査読有.

[8] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Coherent tangent bundles and Gauss-Bonnet formulas for wave fronts, Journal of Geometric Analysis 22 (2012) 383–409, (doi:10.1007/s12220-010-9193-5) , 査読有.

[9] S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossmann, M. Umehara and K. Yamada, CMC-1 trinionoids in H^3 and metrics of constant curvature one with conical singularities on S^2 , Proc. Japan Acad. Ser. A. 87 (2011) 144–149, (doi: 10.3792/pjaa.87.144) , 査読有.

[10] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, A_2 -singularities of hypersurfaces with non-negative sectional curvature in Euclidean space, Kodai Math. J. 34 (2011) 390–409, (doi:10.2996/kmj/1320935549) , 査読有.

[11] Y. Kitagawa and M. Umehara, Extrinsic diameter of immersed flat tori in S^3 , Geometriae Dedicata 155 (2011) 105–140, (doi:10.1007/s10711-011-9580-5) , 査読有.

[12] M. Umehara, A simplification of the proof of Bol's conjecture on sextactic points, Proc. Japan. Acad. Ser. A 87 (2011) 10–12, (doi: 10.3792/pjaa.87.10) , 査読有.

[13] M. Kokubu and M. Umehara, Orientability of linear Weingarten surfaces, spacelike CMC-1 surfaces and maximal surfaces, Math. Nachr. 284 (2011) 1903–1918, (doi:10.1002/mana.200910176) , 査読有.

[14] M. Umehara and K. Yamada, Applications of a completeness lemma in minimal surface theory to various classes of surfaces, Bulletin of the London Mathematical Society, 43 (2011) 191–199, (doi:10.1112/blms/bdq094) , 査読有.

[15] Huili Liu, M. Umehara and K. Yamada, The duality of conformally flat manifolds, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society (N.S.), 42 (2011) 131–152, (doi:10.1007/s00574-011-0007-6) , 査読有.

[16] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, The duality between singular points and inflection points on wave fronts, Osaka J. Math. 47 (2010) 591–607, (<https://projecteuclid.org/euclid.ojm/1277298919>) , 査読有.

[17] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Singularities of Blaschke normal maps of convex surfaces, C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 348 (2010) 665–668, (doi : 10.1016/j.crma.2010.04.021) , 査読有.

〔学会発表〕(計10件)

[1] 梅原雅顕, 「卵形線の縮閉線の形状と特異点」,福岡大学微分幾何研究会(Geometry or Something)2013年11月4日,福岡大学セミナーハウス(福岡県福岡市).

[2] 梅原雅顕, 「3次元時空の空間的極大曲面と,その時間的極小曲面への型変化について」,部分多様体論・湯沢,2012年11月24日,湯沢グランドホテル(新潟県南魚沼郡湯沢町).

[3] 梅原雅顕, 「双曲計量と3次元 de Sitter 空間の平均曲率1の曲面」,福岡大微分幾何研究会(Geometry and something),2012年11月3日,福岡大学セミナーハウス(福岡県福岡市).

[4] 梅原雅顕, 「Differential Geometry of surfaces with singularities」,The 8th Geometry Conference for the Friendship of China and Japan,2012年9月10日,四川大学,成都市(中国).

[5] 梅原雅顕,「Differential Geometry of surfaces with singularities」, 12th International Workshop on Real and Complex Singularities, 2012年7月24日, サンパウロ大学サンカルロス校, サンカルロス(ブラジル).

[6] 梅原雅顕,「交叉帽子の微分幾何学」, 部分多様体と四元数構造(RIMS 研究集会), 2012年6月27日, 京都大学数理解析研究所(京都市, 京都).

[7] 梅原雅顕,「特異点をもつ曲面の微分幾何学」, 2012年3月27日, 日本数学会 2012年年会総合講演, 場所: トッパンホール, (文京区, 東京).

[8] 梅原雅顕,「波面に関するガウス・ボンネ型の定理とその応用」, 近畿大学数学講演会(通称:近大談話会)2011年9月22日(於)近畿大学理工学部(大阪府東大阪市).

[9] 梅原雅顕,「変曲点を持たない平面閉曲線について」, 部分多様体の微分幾何学的研究(RIMS 研究集会) 2011年6月27日(月), 京都大学数理解析研究所(京都市, 京都).

[10] 梅原雅顕,「3次元球面の平坦トーラスの直径について」, 京都大学数学教室談話会, 2011年12月22日, 京都大学数理解析研究所(京都市, 京都).

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)
取得状況(計0件)

〔その他〕

特になし.

6. 研究組織

(1)研究代表者

梅原 雅顕 (UMEHARA MASAOKI)
東京工業大学・大学院情報理工学研究科・教授
研究者番号: 90193945

(2)研究分担者

山田 光太郎 (YAMADA KOTARO)
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 10221657

大仁田 義裕 (OHNITA YOSHIHIRO)
大阪市立大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 90183764

間下 克哉 (MASHIMO KATSUYA)
法政大学・理工学部・教授
研究者番号: 50157187

橋本 英哉 (HASHIMOTO HIDEYA)
名城大学・理工学部・教授
研究者番号: 60218419

ROSSMAN WAYNE (ROSSMAN WAYNE)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 50284485
(最終年度のみ分担者)

(3)連携研究者

小磯 憲史 (KOISO NORIHITO)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 70116028

後藤 竜司 (GOTO RYUSHI)
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 30252571

國分 雅敏 (KOKUBU MASATOSHI)
東京電機大学・工学部・教授
研究者番号: 50287439

藤森 祥一 (FUJIMORI SYOICHI)
岡山大学・理学部・准教授
研究者番号: 00452706

佐治 健太郎 (SAJI KENTARO)
神戸大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 70451432

宮岡 礼子 (MIYAOKA REIKO)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 70108182

泉屋 周一 (IZUMIYA SHYUICHI)
北海道大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 80127422

石川 剛郎 (ISHIKAWA GOO)
北海道大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 50176161

川上 裕 (KAWAKAMI YU)
金沢大学・理工研究域数物科学系・准教授
研究者番号: 60532356

阿賀岡 芳夫 (AGAOKA YOSHIO)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 50192894

北川 義久 (KITAGAWA YOSHIHISA)
宇都宮大学・教育学部・教授
研究者番号: 20144917

満淵 俊樹 (MABUCHI TOSHIKI)

大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：80116102
(2 2 年度のみ分担者)