

平成 26 年 6 月 6 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22340001

研究課題名(和文)p進的手法を用いた数論的多様体の研究

研究課題名(英文)A study of arithmetic geometry by p-adic methods

研究代表者

都築 暢夫(TSUZUKI, NOBUO)

東北大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：10253048

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 12,900,000円、(間接経費) 3,870,000円

研究成果の概要(和文):リジッド解析的な手法と微分形式から定まるコホモロジー理論(p進コホモロジー)などの数論幾何におけるp進的方法の基礎付けを行い、数論的多様体の研究に応用した。複素単位円板上の半安定族のモノドロミー作用の核と余核を記述する完全列のp進類似として、正標数代数曲線上の半安定族におけるp進Clemens-Schmid完全列を構成した。正標数幾何的単枝多様体上のアイソクリスタルの純性に関して、開集合への制限関手の充満忠実性を得た。この結果、完備幾何的単枝多様体の1次リジッドコホモロジー群が重さ1の純であることを得た。さらに、p進コホモロジーの重み理論や数論的D加群の理論を深化・発展させた。

研究成果の概要(英文):We investigated the foundation of p-adic methods in arithmetic geometry, rigid analytic technique and cohomology theory arising from differential forms (i.e., p-adic cohomology), and applied them to study arithmetic varieties. We construct p-adic Clemens-Schmid exact sequence for semistable families over algebraic curves of positive characteristic, which is a p-adic analogue of exact sequence describing kernel and cokernel of monodromy operations for semistable families over the complex unit disk. We studied the purity theorem for isocrystals and established the full faithfulness of restriction functors to open subschemes for isocrystals on geometrically unibranch varieties of positive characteristic. As a consequence, we proved pure of weight 1 for first rigid cohomology of proper and geometrically unibranch varieties. We also developed the weight theory in p-adic cohomology and the theory of arithmetic D-modules.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：数論幾何 数論的D加群 リジッド解析幾何 p進コホモロジー 過収束Fアイソクリスタル Clemens-Schmid完全列 重みモノドロミースペクトル系列 国際研究者交流

1. 研究開始当初の背景

数論幾何の研究において、コホモロジーは本質的なものである。歴史的に、1 進エタールコホモロジーが p 進コホモロジー論より先に発展したが、90 年代以降のゼータ関数の特殊値(例えば岩澤理論)などの研究において、 p 進コホモロジー論の更なる深化が至急の課題となっている。

80 年代に、P.Berthelot は正標数代数多様体の p 進コホモロジー論を定式化した。それは、リジッドコホモロジーと 2 つの重要な係数「過収束 F アイソクリスタル」と「数論的 D 加群」の圏からなり、代数解析における D 加群の理論の p 進類似として展開されるものである。彼は、ホロノミックな数論的 D 加群の圏を導入し、所謂 6 つのコホモロジー的関手に関して閉じていると予想した。すなわち、ホロノミックな D 加群とそのコホモロジー論が正標数代数多様体の良い p 進コホモロジー論を与えると予想した。海外共同研究者の D.Caro は、過ホロノミック D 加群(ホロノミックであり、同値と予想されている)を導入して、過ホロノミック D 加群が構成可能層と類似の性質を持つこと証明した。Caro と研究代表者の都築は、過収束 F アイソクリスタルの半安定予想(志甫予想、K.Kedlaya により解決)のもと、過ホロノミック D 加群の圏は過収束 F アイソクリスタルを含み、6 つのコホモロジー的関手で閉じていることを証明した。Berthelot の予想はまだ完全には解決していないが、この結果により数論的多様体を研究する上では十分大きな圏が導入できたことになり、消滅サイクルの理論など数論多様体への応用に向けた p 進コホモロジー論の展開が可能になった。

Siegel 保型形式など高次元保型形式の p 進的性質を研究することは、岩澤理論への応用など、今後の数論幾何学の展開において重要な課題である。連携研究者の山内や河村は Siegel 保型形式の具体的な構成やその Fourier 係数の明示的計算を行い、 p 進的性質の研究への足場を築いた。

2. 研究の目的

数論幾何学における p 進的方法とは、数論的多様体(素体上有限生成な体上の代数多様体)やその上のガロア表現を p 進位相に関して形式的または解析的に研究する方法である。この研究では、近年ますますその重要性が増してきた p 進的方法、特に、リジッド解析的な手法と微分形式から定まるコホモロジー理論(p 進コホモロジー)の基礎付けをす

ることと、それらを数論的多様体や p 進保型形式等の研究に応用することを目的としている。具体的には

(1)数論的 D 加群とリジッドコホモロジーの更なる展開

(2) 保型形式の p 進族の幾何的視点による考察

(3) p 進微分方程式と数論的不変量の半連続性

に成果を上げることが目的としている。今までは別個に行われてきたテーマを、リジッド解析と p 進コホモロジーを軸に統一した視点で研究を行う。 p 進的方法の基礎付け・整備を行い、1 進理論に追いつくことを目標としている。理論の整備が進めば、直接的に計算できるという p 進的手法の利点が生かされ、数論的多様体の研究全体に更なる進展がもたらされることになる。

また、 p 進的手法をテーマとした数論幾何学の国際シンポジウムを開催し、研究成果を公開するとともに、数論幾何学における p 進的手法の発展と深化に貢献する。

3. 研究の方法

数論幾何学の各方面での研究に適用可能な p 進的手法を開発・研究することを一つの目的としているので、しっかりした基礎付けを行う。

数論的 D 加群とリジッドコホモロジーの研究においては

(1)数論的 D 加群を用いた消失サイクルの導入

(2) Fourier 変換・超局所解析の基礎付けとその応用

(3)過収束 F アイソクリスタルの純性の考察を行い、 p 進コホモロジーのより深い理解に到達する。1 進理論や複素解析多様体上の D 加群の理論と並行する形で、理論を進める。この研究においては、Caro と研究代表者の都築による数論的 D 加群の過ホロノミー性が鍵になる。リジッド解析的な視点での過収束アイソクリスタル係数の相対的リジッド・コホモロジーやコンパクト台付きコホモロジー理論の整備を行い、数論多様体への応用可能な形まで整備する。

保型形式の p 進族の幾何的視点による考察においては

(1) p 進一意化を利用した保型多様体の p 進解析幾何的な考察

(2) 高次元保型形式の p 進族の構成を具体的に考察する。

4. 研究成果

この研究において、研究代表者の都築は

(1) 正標数半安定族に対する p 進 Clemens-Schmid 完全列

(2) マイルドな特異性を持つ正標数代数多様体上の過収束アイソクリスタルの純性

(3) F アイソクリスタルに対する Lefschetz 型の定理

を得た。以下、それぞれについて説明する。

(1) Clemens-Schmid 完全列は半安定族のコホモロジーへのモノドロミー作用の核と余核を決定する完全列である。単位円板上の複素多様体の半安定族の場合には、Clemens, Schmid, Steenbrink らにより、その位相的な性質と Hodge 構造の重みの理論(重み・モノドロミースペクトル列)を用いて証明されている。また、正標数代数曲線上の半安定族の場合、 1 進コホモロジー理論においては、Deligne の Hensel 化近傍と重み理論の帰結として証明される。正標数 Henselian 離散付値環上の族の場合も、複素多様体の穴あき単位円周と同様に証明されている。研究代表者は、パドバ大学の Chiarellotto 教授との共同研究で、 p 進コホモロジーに関する Clemens-Schmid 完全列の存在を証明した。この場合は、兵頭-加藤による対数的クリスタルコホモロジーが極限コホモロジーで有り、モノドロミーが作用する。このモノドロミー作用は、 p 進単位円板上の対数付きリジッドコホモロジーによって解釈できる。リジッド解析空間における極限操作を利用することで、対数的クリスタルコホモロジーとリジッドコホモロジーからなる Clemens-Schmid 列ができる。Frobenius 作用による重みに着目して、Crew による p 進重みモノドロミー定理を適用すると、Clemens-Schmid 列の完全性が証明出来る。一般には、コホモロジーを考える際に超被覆をとる必要があり、正規完全交叉多様体に対する単体的被覆の具体的な構成も与えた。

(2) 正標数代数多様体上の過収束アイソクリスタルの圏の開部分多様体上への制限関手の充満忠実性に関して

幾何的単枝代数多様体で補集合が余次元 1 の開部分多様体の場合

局所完全交叉代数多様体で補集合が余次元 2 の開部分多様体の場合

を証明した。完備被覆に関するコホモロジー的降下を適用すると、問題は完備被覆の直積空間の連結性に関する問題になる。幾何的単枝代数多様体の場合は、余次元 1 を除いた

連結成分ともとの連結成分は 1 対 1 対応するので、証明が完了する。この系として、完備な幾何的単枝代数多様体の 1 次コホモロジーは純であること、すなわち、完備滑らかな代数多様体の 1 次コホモロジーの部分商になることが証明出来る。この場合は、局所完全交叉多様体の連結性に関する Hartshorne の結果を利用することで、コホモロジー的降下を適用することが可能になる。この場合、余次元が 2 は本質的である。

ここでの手法は幾何的であり、 1 進江タールコホモロジーなど良いコホモロジー理論において同様に成り立つ。

(3) 連携研究者の阿部とともに F アイソクリスタルに対する Lefschetz 型の定理を考察して、 3 次元以上の場合に超平面切断による制限関手は

充満忠実性

既約な対象の保存

が成り立つことを証明した。Lefschetz 型の定理は、 F アイソクリスタルの圏の圏論的性質の考察において重要な働きをする。

分担者の加藤はリジッド幾何学の基礎付け、特に位相環論の性質野基礎付けを行った。志甫はアイソクリスタルの延長に関する Zariski-Nagata 型の定理を証明した。山崎は局所体上の代数多様体の類体論に関して成果を得た。連携研究者の中島は正標数の単体的スキームの p 進コホモロジーを用いた重みの理論に成果を得た。山内は、混標数局所体の p 進表現に関する Sen-Brinon の定理を拡張して、保型性の問題への新たな展望を得た。また、連携研究者の阿部は D 加群における Frobenius 構造の考察や数論的 D 加群における消滅サイクルの定式化を行い、 1 進理論と類似の重みの理論を構成した。

この科研費の援助のもとで、 5 件の国際研究集会と 4 件の国内研究集会を開催した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 27 件)

1. Gunther Cornelissen, Fumiharu Kato, Janne Kool, A combinatorial Li-Yau inequality and rational points on curves, Math. Annalen, 査読有, 2014 年, 印刷中,
<http://arxiv.org/abs/1211.2681>

2. Michitaka Miyauchi, Takuya Yamauchi, An explicit computation of p -stabilized vectors, J. de Theo. des Nombres de Bordeaux, 査読有, 2014 年, 印刷中,

- <http://arxiv.org/pdf/1210.2608.pdf>
3. Tomoyuki Abe, Explicit calculation of Frobenius isomorphisms and Poincare duality in the theory of arithmetic D-modules, Rend. del Sem. Mat. della Univ. Padova, 査読有, 2014 年, 印刷中, <http://arxiv.org/pdf/1105.5796.pdf>
 4. Tomoyuki Abe, Adriano Marmorà, On p-adic product formula for epsilon factors, J. de Inst. de Math. Jussieu, 査読有, 2014 年, 印刷中, <http://arxiv.org/abs/1104.1563>
 5. Bruno Chiarellotto, Nobuo Tsuzuki, Clemens-Schmid exact sequence in characteristic p, Math. Annalen, 査読有, 358 巻, 2014 年, 971-1004, DOI: 10.1007/s00208-013-0980-8
 6. Daniel Allcock, Fumiharu Kato, The densest lattices in PGL₃Q₂, Adv. Math. 査読有, 242 巻, 2013 年, 102-115, DOI: 10.1016/j.aim.2013.04.003
 7. Takao Yamazaki, Brauer-Manin pairing, class field theory and motivic homology, Nagoya Math. J., 査読有, 210 巻, 2013 年, 9-58, <https://projecteuclid.org/euclid.nmj/1369058027>
 8. Bruno Kahn, Takao Yamazaki, Voevodsky's motives and Weil reciprocity, Duke Math. J., 査読有, 162 巻, 2013 年, 2751-2796, DOI: 10.1215/00127094-2381379
 9. Nobuo Tsuzuki, A note on the first rigid cohomology group for geometrically unibranch varieties, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 査読有, 128 巻, 2012 年 17-58, DOI:10.4171/RSMUP/128-3
 10. Daniel Caro, Nobuo Tsuzuki, Overholonomicity of overconvergent F-isocrystals over smooth varieties, Annals of Math., 査読有, 176 巻, 2012 年, 747-813, DOI:10.4007/annals.2012.176.2.2
 11. Jakub Byszewski, Gunther Cornelissen, Fumiharu Kato, Un anneau de deformation universel en conducteur superieur, Proc. of Japan Acad., Ser. A, 査読有, 176 巻, 2012 年 747-813, DOI: 10.3792/pjaa.88.25
 12. Noriyuki Suwa, Artin-Schreier-Witt extensions and normal bases, Hiroshima Math. J., 査読有, 44 巻, 2012 年 325-354 <http://projecteuclid.org/euclid.hmj/1355238372>
 13. Bruno Chiarellotto, Nobuo Tsuzuki, Log-growth filtration and Frobenius slope filtration of F-isocrystals at the generic and special points, Doc. Math. 査読有, 16 巻, 2011 年 33-69, <http://www.emis.de/journals/DMJDMV/vol-16/vol-16.html>
 14. Kazuhiro Fujiwara, Ofer Gabber, Fumiharu Kato, On Hausdorff completions of commutative rings in rigid geometry, J. Algebra, 査読有, 332 巻, 2011 年 293-321, DOI:10.1016/j.jalgebra.2011.02.001
 15. Atsushi Shiho, Cut-by-curves criterion for the log extendability of overconvergent isocrystals, Math. Z., 査読有, 269 巻, 2011 年 59-81, DOI: 10.1007/s00209-010-0716-3
 16. 志甫淳, p 進微分方程式と過収束アイソクリスタル, 数学, 査読有, 63 巻, 2011 年, 369-395, https://www.jstage.jst.go.jp/article/sugaku/63/4/63_0634369/_pdf
 17. Gunther Cornelissen, Fumiharu Kato, Aristides Kontogeorgis, The relation between rigid-analytic and algebraic deformation parameters for Artin-Schreier-Mumford curves, Israel J. Math. 査読有, 180 巻, 2010 年 345-370, DOI: 10.1007/s11856-010-0107-9
 18. Atsushi Shiho, On logarithmic extension of overconvergent isocrystals, Math. Ann., 査読有, 348 巻, 2010 年 517-537, DOI: 10.1007/s00208-010-0489-3
 19. Takuya Yamauchi, A generalization of Sen-Brinon's theory, Manuscripta Math., 査読有, 133 巻, 2010 年 467-512, DOI: 10.1007/s00229-010-0372-2
 20. Hidenori Katsurada, Hisa-aki Kawamura, On the Andrianov-type identity for power series attached to Jacobi forms and its application, Acta Arith., 査読有, 145 巻, 2010 年 233-265, DOI:10.4064/aa145-3-3
- [学会発表](計 92 件)
1. 都築暢夫, On the singular fiber of the arithmetic family of hypergeometric Calabi-Yau, Sem. de Geom. Arith. et Motivative, 2014 年 3 月 14 日, フランス・パリ 13 大学
 2. 都築暢夫, On integral cohomologies for an arithmetic family of hypergeometric Calabi-Yau, Sem. de Math., 2014 年 3 月 12 日, フランス・IHES
 3. 山崎隆雄, Voevodsky's motives and Weil reciprocity, 2014 NCTS Mini-Workshop on Number Theory, 2014 年 3 月 12 日, 台湾・NCTS
 4. 中島幸喜, Several p-adic weight spectral sequences of SNCL schemes in characteristic p, p-adic cohomology

- and its applications, 2014, 2014年1月8日, 東北大学
5. 加藤文元, Combinatorial Li-Yau inequality and rational points on curves, p-adic cohomology and its applications, 2014, 2014年1月8日, 東北大学
 6. 志甫淳, On homotopy exact sequence for log de Rham fundamental groups, p-adic cohomology and its applications 2014, 2014年1月7日, 東北大学
 7. 阿部知行, Some l and p independence results, p-adic cohomology and its applications 2014, 2014年1月7日, 東北大学
 8. 山崎隆雄, p-adic soliton theory and torsion points on Jacobian varieties, 代数的整数論とその周辺, 2013年12月11日, 京都大学
 9. 都築暢夫, Singular fibers of the arithmetic family of hypergeometric Calabi-Yau varieties, Arithmetic, differentials, and geometry, 2013年11月1日, 東北大学
 10. 阿部知行, On nearby cycle functor for arithmetic D-modules, Arithmetic, differentials, and geometry, 2013年11月1日, 東北大学
 11. 山内卓也, Artin representations for $GSp(4)$ attached to real analytic Siegel modular forms, Number Theory / Representation Theory Seminar, 2013年9月25日, カナダ・トロント大学
 12. 山崎隆雄, Reciprocity sheaves, Workshop on reciprocity sheaves, 2013年7月31日, 八ヶ岳自然文化園
 13. 山内卓也, The L-function of some Siegel modular 3-folds and endoscopic lifts, Sem. at Jussieu, 2013年6月17日, フランス・パリ6大学
 14. 加藤文元, Fake projective planes via p-adic uniformisation, Minnaertgebouw, 2013年5月8日, オランダ・ユトレヒト大学
 15. 志甫淳, On restriction of overconvergent isocrystals, Number theo. sem., 2013年3月27日, 韓国・KIAS
 16. 都築暢夫, On the first rigid cohomology groups for mildly singular varieties, Sem. Geom. Alg., 2013年3月21日, フランス・レンヌ大学
 17. 諏訪紀幸, Kummer theory for algebraic tori and normal basis problem, 整数論研究集会, 2013年3月16日, 早稲田大学
 18. 都築暢夫, On the first rigid cohomology groups for mildly singular varieties, Mini-workshop on Arithmetic, 2012年12月18日, 台湾・台湾大学
 19. 山崎隆雄, Algebraic cycles on a product of curves over a p-adic field, Sem. autour des cycles alg., 2012年11月21日, フランス・パリ6大学
 20. 山内卓也, Endoscopic lift to the Siegel paramodular threefold related to Klein cubic threefold, Number Theo. / Rep. Theo. Sem., 2012年11月21日, カナダ・トロント大学
 21. 阿部知行, Theory of weights in arithmetic D-modules, Sem. de Geom. Arith., 2012年11月14日, フランス・IHES
 22. 志甫淳, On restriction of overconvergent isocrystal, p-adic cohomology and its applications to arithmetic geometry, 2012年11月2日, 東北大学
 23. 阿部知行, Frobenius structures in the theory of arithmetic D-modules, p-adic cohomology and its applications to arithmetic geometry, 2012年11月2日, 東北大学
 24. 都築暢夫, The first rigid cohomology groups for mildly singular varieties, p-adic cohomology and its applications to arithmetic geometry, 2012年10月30日, 東北大学
 25. 中島幸善, Crystalline construction of weight filtered p-adic Steenbrink complex and its applications, p-adic cohomology and its applications to arithmetic geometry, 2012年10月29日, 東北大学
 26. 志甫淳, On restriction of overconvergent isocrystals, Arithmetic Geometry Week in Tokyo, 2012年6月6日, 東京大学
 27. 阿部知行, 数論的 D 加群とその応用について, 日本数学会, 2012年3月29日, 東京理科大学
 28. 河村尚明, On the Duke-Imamoglu lifting of p-adic families of elliptic modular forms and its applications, UCLA Number Theory Sem., 2012年2月27日, アメリカ・ロサンゼルス
 29. 山内卓也, L-function of some Siegel threefold of low level: non-neat case, Workshop on p-adic arithmetic geometry and motives, 2012年1月25日, 東北大学
 30. 阿部知行, Langlands program for p-adic coefficients and the petites camarades conjecture, Workshop on p-adic arithmetic geometry and motives, 2012年1月23日, 東北大学.
 31. 都築暢夫, Arithmetic families of

- Calabi-Yau varieties having a generalized hypergeometric function as a period integral, 代数的整数論とその周辺, 2011年11月28日, 京都大学
32. 山崎隆雄, Voevodsky's motif and Weil reciprocity, 代数的整数論とその周辺, 2011年11月27日, 京都大学
 33. 志甫淳, 過収束アイソクリスタル, 日本数学会総合講演, 2011年9月29日, 信州大学
 34. 都築暢夫, A family of Calabi-Yau related to certain generalized hypergeometric local systems, from p-adic differential equations to arithmetic algebraic geometry, 2011年2月5日, イタリア・パドバ大学
 35. 都築暢夫, Rigid cohomology, 2010年台湾数学会年会, 2010年12月11日, 台湾・国立彰化師範大学
 36. 都築暢夫, Log-growth and Frobenius for p-adic differential equations, Berkovich Spaces and p-adic Differential Equations, 2010年11月8日, フランス・ストラスブルク大学
 37. 山崎隆雄, Brauer groups and 0-cycles on open varieties over a local field, 日本数学会代数学分科会特別講演, 2010年9月24日, 名古屋大学
 38. 中島幸喜, Weight filtrations on log crystalline cohomologies of families of truncated split simplicial semistable varieties, Log Conf 2010, Current trends in logarithmic geometry, 2010年6月24日, フランス・ポルドー大学
 39. 志甫淳, Logarithmic extension of overconvergent isocrystals and applications, Log Conf 2010, Current trends in logarithmic geometry, 2010年6月23日, フランス・ポルドー大学
 40. 都築暢夫, Overconvergent F-isocrystals and rigid cohomology on curves, Summer school "p-adic cohomologies and arithmetic applications", 2010年6月15日-18日, スペイン・セビリア大学

〔図書〕(計1件)

1. Yukiyoshi Nakkajima, Memoires de la SMF, 「Weight filtration and slope filtration on the rigid cohomology of a variety」, 2012年, 264ページ

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)
取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

p-adic cohomology and its applications, 2014
<http://www.math.tohoku.ac.jp/~tsuzuki/2014p-adic/2014Jan>
 p-adic cohomology and its applications
<http://www.math.tohoku.ac.jp/~tsuzuki/2012p-adic/2012sendai.html>
 Workshop on p-adic arithmetic geometry and motives
<http://www.math.tohoku.ac.jp/~ytakao/conf11-2.html>
 Arithmetic geometry and p-adic differential equations
<http://www.math.tohoku.ac.jp/~tsuzuki/program100701/program.pdf>
 第9-12回仙台広島整数論集会
<http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/JSPS-CoreToCore>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

都築 暢夫 (TSUZUKI, NOBUO)
 東北大学・大学院理学研究科・教授
 研究者番号: 10253048

(2) 研究分担者

加藤 文元 (KATO, FUMIHARU)
 熊本大学・大学院理学研究科・教授
 研究者番号: 50294880

志甫 淳 (SHIHO, ATSUSHI)
 東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
 研究者番号: 30292204

山崎 隆雄 (YAMAZAKI, TAKAO)
 東北大学・大学院理学研究科・教授
 研究者番号: 00312794

(3) 連携研究者

中島 幸喜 (NAKAJIMA, YUKIYOSHI)
 東京電機大学・工学部・准教授
 研究者番号: 80287440

山内 卓也 (YAMAUCHI, TAKUYA)
 鹿児島大学・教育学部・准教授
 研究者番号: 90432707

河村 尚明 (KAWAMURA, HISA-AKI)
 広島大学・大学院理学研究科・助教
 研究者番号: 00533746

阿部 知行 (ABE, TOMOYUKI) (2010年10月から)
 東京大学・大学院数理科学研究科・特任助教
 研究者番号: 70609289

諏訪 紀幸 (SUWA, NORIYUKI) (2010年10月から)
 中央大学・理工学部・教授
 研究者番号: 10196925