

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 17 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2010～2014

課題番号：22340013

研究課題名(和文) 3次元多様体の幾何構造と組合せ構造

研究課題名(英文) Geometric structure and combinatorial structure of 3-dimensional manifolds

研究代表者

作間 誠 (SAKUMA, MAKOTO)

広島大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：30178602

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,500,000円

研究成果の概要(和文)：(1) Donghi Lee氏との共同研究：McShaneの等式の類似を2橋結び目に対して証明した。更に、2橋絡み目に付随するHeckoid軌道体が双曲軌道体であることを証明し、2橋絡み目群から偶型Heckoid群の上方メリディアン対保存全射準同型を全て決定した。
(2) 大鹿健一氏との共同研究：3次元多様体Mのヘガード曲面Sが十分大きなHempel距離を持つなら、Sに対して自然に定まる写像類群Gが自然な自由積群分解を持つことを証明した

研究成果の概要(英文)：(1) Joint work with Donghi Lee: We established a variation of McShane's identity for 2-bridge links. Moreover, we introduced the Heckoid orbifolds and proved that they are hyperbolic, and gave a systematic construction of epimorphisms from 2-bridge link groups onto Heckoid groups. Furthermore, we proved that these are the only upper-meridian pair preserving epimorphisms onto even Heckoid groups.

(2) Joint work with Ken'ichi Ohshika: We proved that for a Heegaard surface S of a 3-manifold M with high Hempel distance, a certain natural mapping class group associated with S has a natural free decomposition. We also proved that if S is of bounded combinatorics then there is a nonempty open set U of the projective measured lamination space of S, such that any simple loop in U is not null-homotopic in M and that any two distinct simple loops in U are not homotopic in M.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：2-bridge knot 2-bridge link bridge decomposition Heegaard splitting McShane's identity cusp shape

1. 研究開始当初の背景

秋吉, 和田, 山下の3氏との共同研究で, 1点穴あきトーラス群に関する Jorgensen 理論を確立し, その拡張により2橋絡み目の双曲構造が自然に理解できることを示していた. そしてこの研究から, 2橋絡み目の双曲構造と橋構造に関する様々な予想が自然に生まれていた. 更にその予想の一般化として, 一般の3次元多様体の幾何構造とヘガード構造との関係に関する予想も立てていた.

2. 研究の目的

3次元多様体の幾何構造と組み合わせ構造(特にヘガード構造)との関係を解明すること, 特に2橋絡み目に関する諸予想を解決すること.

3. 研究の方法

研究成果(1),(2),(3)を得るにあたっては, Small cancellation theory が最も重要な手段であった. 研究成果(5)は3次元多様体論における様々な幾何的手法と幾何学的群論の手法が重要な役割を果たした. また実験的性質をもつ研究成果(4)(5)ではコンピュータ実験が大切な役割を果たした.

4. 研究成果

(1) 2橋絡み目に関する McShane の等式の証明 (Donghi Lee 氏との共同研究): 穴あきトーラスフックス群に対する McShane の等式の類似を2橋結び目に対して証明した. これにより, 双曲的結び目のカスプの形を2橋絡み目補空間内の2橋球面が定める4点穴あき球面上の本質的単純閉曲線の複素長さにより記述できた. 証明の最も難しい部分は, 無限級数が収束することの証明であるが, これは, 次の2つの群論的結果と有限体積双曲多様体の length spectrum の離散性を用いることにより解決した. (a) 2橋絡み目補空間内の2橋球面が定める4点穴あき球面上の2つの本質的単純閉曲線がホモトピックになるための必要十分条件を与えたこと. (b) 2橋絡み目補空間内の2橋球面が定める4点穴あき球面上の本質的単純閉曲線が周辺的であるための必要十分条件を与えたこと. これらの群論的結果は, small cancellation theory を2橋絡み目の2元生成1関係式の群表示に適用することにより得られた.

(2) Heckoid 軌道体と Heckoid group の研究 (Donghi Lee 氏との共同研究): 2橋絡み目に付随する Heckoid 軌道体の概念を導入し, それが双曲軌道体であることを証明することにより, Riley により導入された2橋絡み目群に付随する Heckoid 群の概念をきちんと定式化した. また, 2橋絡み目群から Heckoid 群への全射準同型の組織的構成を与えた. これは Riley による構成の一般化になっている. 更に偶型 Heckoid 群に対しては, その2橋球面が定める4点穴あき球面上の単純閉曲線

が Heckoid 軌道体内でヌルホモとピックとなるための必要十分条件を small cancellation theory を用いて与え, 応用として, 2橋絡み目群から偶型 Heckoid 群への上方メリディアン対保存全射準同型は上で構成したものに限ることを証明した.

(3) 偶型 Heckoid 群の共役問題の研究 (Donghi Lee 氏との共同研究): 偶型 Heckoid 群の2橋球面が定める4点穴あき球面上の2つの単純閉曲線が Heckoid 軌道体内でホモとピックとなるための必要十分条件を与えた. またそのような単純閉曲線は, Heckoid 軌道体内で周辺的でも有限回数でもないことを証明した. これらの結果を用いることにより, 偶型 Heckoid 軌道体に対する McShane の等式の類似が成立することが導かれる.

(4) ある双曲的錐多様体の連族族に関する実験的研究 (秋吉宏尚氏との共同研究): 2橋絡み目及び偶型 Heckoid 軌道体は, ある双曲的錐多様体の連族族に含まれている. 2橋絡み目及び偶型 Heckoid 軌道体に関する諸性質は, その双曲的錐多様体において成立しており, それを理解することが, 諸性質の真に理解することに通じると期待している. 特に2橋球面上の(一定の条件を満たす)単純閉曲線の長さは, 錐角が増大するにつれて単調減少出あると予想している. コンピュータ実験によりこの予想を支持する結果を得た.

(5) ヘガード曲面上の単純閉曲線の挙動とヘガード曲面に付随する写像類群の研究 (大鹿健一氏との共同研究): 2橋絡み目に関する一連の研究成果が, 一般の3次元多様体のヘガード分解に対してどの程度まで成立するかという問題に取り組み, 下記の結果を得た. (a) 3次元多様体 M のヘガード分解 $(V_1, V_2; S)$ に対して, 恒等写像にホモトピックな V_i の向き保存自己同相写像が生成する S の写像類群 $MCG(S)$ の部分群を G_i とし, G_1 と G_2 が生成する $MCG(S)$ の部分群を G とする. このとき, もしヘガード分解が十分高い Hempel 距離を持つなら, G は G_1 と G_2 の自由積である. (b) 単射半径が下から押さえられている有向閉3次元双曲多様体 M のヘガード曲面 S が十分高い Hempel 距離を持つなら, S の射影的測度付き葉層構造空間 $PML(S)$ の空でない開集合 U で, その中に含まれる任意の単純閉曲線が M 内で可縮でないものが存在する. 更に, U 内の任意の2つの単純閉曲線は M 内でホモトピックでない. 特に $MCG(S)$ の部分群 G の $PML(S)$ への作用は空でない不連続領域を持つ.

(6) 2橋結び目の空間の研究 (Gaven Martin 氏との共同研究): 3次元双曲空間の2つの放物変換が生成する群全体の空間は0でない複素数全体の空間 \mathbb{C}^* と同一視される. この空間内において2橋絡み目群全体が作る部

分集合 K の集積点集合が Riley slice の境界に一致することを観察した。また K は網目構造と呼ぶべき美しい性質を持っているという予想を提案した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 11 件)

1. Donghi Lee and Makoto Sakuma, Homotopically equivalent simple loops on 2-bridge spheres in 2-bridge link complements (I), *Geometry Dedicata*, Vol 171, no.1 (2014), 1-28. 査読あり
2. Donghi Lee and Makoto Sakuma, Homotopically equivalent simple loops on 2-bridge spheres in 2-bridge link complements (II), *Geometry Dedicata*, Vol 171, no.1 (2014), 29-56. 査読あり
3. Donghi Lee and Makoto Sakuma, Homotopically equivalent simple loops on 2-bridge spheres in 2-bridge link complements (II), *Geometry Dedicata*, Vol 171, no.1 (2014), 57-91. 査読あり
4. Hirota Akiyoshi, Donghi Lee and Makoto Sakuma, A variation of McShane's identity for 2-bridge links and its possible generalization, *RIMS Kokyuroku Bessatsu B48* (2014), 131-147. 査読あり
5. Donghi Lee and Makoto Sakuma, A variation of McShane's identity for 2-bridge links, *Geom. Topol.* 17 (2013), 2061--2101. 査読あり
6. Donghi Lee and Makoto Sakuma, Epimorphisms from 2-bridge link groups onto Heckoid groups (I), *Hiroshima Math. J.* 43 (2013), 239-264. 査読あり
7. Donghi Lee and Makoto Sakuma, Epimorphisms from 2-bridge link groups onto Heckoid groups (II), *Hiroshima Math. J.* 43 (2013), 265-284. 査読あり
8. Donghi Lee and Makoto Sakuma, Simple loops on 2-bridge spheres in Heckoid orbifolds for 2-bridge links, *Electron. Res. Announc. Math. Sci.* 19 (2012), 97-111. 査読あり
9. Donghi Lee and Makoto Sakuma, Epimorphisms between 2-bridge link groups: homotopically trivial simple loops on 2-bridge spheres, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) 104 (2012), 359-386. 査読あり
10. Donghi Lee and Makoto Sakuma, Simple loops on 2-bridge spheres in 2-bridge link complements, *Electron. Res. Announc. Math. Sci.* 18 (2011), 97-111. 査読あり
11. Warren Dicks and Makoto Sakuma, Punctured torus bundles III: Comparing two tessellations of the complex plane, *Topology Appl.*, 157 (2010), 1873-1899. 査読あり

[学会発表](計 22 件)

1. Makoto Sakuma, Mapping class group action on the space of geodesic rays of a punctured hyperbolic surface, *Low dimensional topology and number theory VII*, 2015 年 3 月 25 日-28 日, 九州大学産学官連携イノベーションプラザ
2. 作間 誠, Mapping class group action on the space of geodesic rays of a punctured hyperbolic surface, *Branched coverings, degenerations and related topics 2015*, 2015 年 2 月 22 日-24 日, 東北学院大学
3. Makoto Sakuma, Mapping class group action on the space of geodesic rays of a punctured hyperbolic surface, *Topology and geometry of low-dimensional manifolds*, 2014 年 10 月 27 日-30 日, 奈良学セミナーハウス
4. 作間 誠, Mapping class group action on the space of geodesic rays of a punctured hyperbolic surface, *リーマン面に関する位相幾何学*, 2014 年 8 月 25 日-28 日, 東京大学
5. Makoto Sakuma, Groups generated by two parabolic transformations *Knot Theory and Its Applications*, 2013 年 12 月 16 日-20 日, Mohari, インド
6. Makoto Sakuma, Simple loops on bridge spheres and Heegaard surfaces, *The 60th Geometry Days in Novosibirsk*, 2013 年 8 月 28 日-31 日, Novosibirsk ロシア
7. 作間 誠, 8 の字結び目補空間の双曲構造--Riley の発見と Jorgensen, Thurston の仕事--, 第 60 回 Encounter with Mathematics 2013 年 5 月 17 日-18 日, 中央大学
8. 作間 誠, Simple loops on bridge spheres and Heegaard surfaces, *日本数学会 2013 年度年会特別講演*, 2013 年 3 月 20 日, 京都大学
9. 作間 誠, Kleinian groups generated by two parabolic transformation, *E-KOOK セミナー*, 2013 年 2 月 16 日, 大阪市立大学
10. Makoto Sakuma, Simple loops on bridge spheres in even Heckoid orbifolds for 2-bridge links, *Low-dimensional geometry and topology*, 2012 年 9 月 11 日-15 日, 東京工業大学
11. 作間 誠, Kleinian groups generated by

- two parabolic transformation ,特異点と多様体の幾何学, 2012年8月26日-28日, 山形大学
12. Makoto Sakuma, On Heckoid groups for two-bridge links, Group actions and applications in geometry, topology and analysis, 2012年7月23日-27日 Kunming University of Science and Technology, 中国
 13. Makoto Sakuma, End invariants for $SL(2, \mathbb{C})$ -characters of the once-punctured torus, associated with Heckoid groups, Representation spaces, twisted topological invariants and geometric structures of 3-manifolds, 2012年5月28日-31日, 強羅静雲荘
 14. Makoto Sakuma, On Heckoid groups for two-bridge links, Tokyo workshop on low-dimensional topology, 2012年3月20日-24日, 東京工業大学
 15. 作間 誠, Prime amphicheiral knots admitting a free involution, 結び目理論の展望, 2012年3月17日-18日, 早稲田大学
 16. Makoto Sakuma, On Heckoid groups for two-bridge links, Low dimensional topology and number theory IV, 2012年3月12日-16日, 九州大学
 17. 作間 誠, On Heckoid groups for two-bridge links, 離散群と双曲空間, 2011年12月12日-16日, 数理解析研究所
 18. 作間 誠, A variation of McShane's identity for 2-bridge links, 筑波大学トポロジーセミナー, 2011年11月29日, 筑波大学
 19. Makoto Sakuma, Essential simple loops on 2-bridge spheres in 2-bridge link complements, Hyperbolicity in geometry, topology and dynamics, 2011年7月25日-27日, Univ. Warwick, 英国
 20. Makoto Sakuma, Essential simple loops on 2-bridge spheres, Workshop on low-dimensional topology in Shanghai and Suzhou, 2011年5月15日-17日, 華東師範大学, 中国,
 21. Makoto Sakuma, Epimorphisms between 2-bridge link groups: Essential simple loops on 2-bridge spheres, RIMS Seminar, Twisted topological invariants and low-dimensional manifolds, 2010年9月13日-17日, あきた白神体験センター
 22. Makoto Sakuma, A variation of McShane's identity for 2-bridge links, Geometry, Topology and Dynamics of Character Varieties, 2010年8月9日-13日, Singapore National Univ., シンガポール

6. 研究組織

(1) 研究代表者

作間 誠 (SAKUMA MAKOTO)
 広島大学・大学院理学研究科・教授
 研究者番号: 30178602

(2) 研究分担者

島田 伊知朗 (SHIMADA ICHIRO)
 広島大学・大学院理学研究科・教授
 研究者番号: 10235616

土井 英雄 (DOI HIDEO)
 広島大学・大学院理学研究科・講師
 研究者番号: 72542810
 (平成25年度より研究分担者)

安井 弘一 (YASUI KOICHI)
 広島大学・大学院理学研究科・助教
 研究者番号: 70547009
 (平成26年度より研究分担者)

平之内 俊郎 (HIRANOUCHI TOSHIRO)
 広島大学・大学院理学研究科・助教
 研究者番号: 59321203
 (平成24年度より研究分担者,
 平成25年度より連携研究者)

鎌田 聖一 (KAMADA SEIICHI)
 大阪市立大学大学院理学研究科・教授
 研究者番号: 60254380
 (平成25年度より連携研究者)

河野 正晴 (KONO MASAHARU)
 北見工業大学工学部・教授
 研究者番号: 40170203
 (平成26年度より研究分担者)

新國 亮 (NIKKUNI RYO)
 東京女子大学現代教養部・准教授
 研究者番号: 00401878
 (平成25年度より研究分担者,
 平成26年度より連携研究者)

(3) 連携研究者

秋吉 宏尚 (AKIYOSHI HIROTAKA)
 大阪市立大学大学院・准教授
 研究者番号: 80397611

平澤 美可三 (HIRASAWA MIKAMI)
 名古屋工業大学工学研究科・准教授
 研究者番号: 00337908

大鹿 健一 (KEN'ICHI OHSHIKA)
 大阪大学大学院理学研究科・教授
 研究者番号: 70183225

和田 昌昭 (WADA MASA AKI)
大阪大学大学院理学研究科・教授
研究者番号：80192821

宮地 秀樹 (MIYACHI HIDEKI)
大阪大学大学院理学研究科・教授
研究者番号：40385480

金 英子 (KIN EIKO)
大阪大学大学院理学研究科・准教授
研究者番号：80378554

小林 毅 (KOBAYASHI TSUYOSHI)
奈良女子大学理学部・教授
研究者番号：00186751

山下 靖 (YAMASHITA YASUSHI)
奈良女子大学理学部・教授
研究者番号：70239987

森元 勘治 (MORIMOTO KANJI)
甲南大学理学部・教授
研究者番号：90200443

中西 敏浩 (NAKANISHI TOSHIHIRO)
島根大学総合理工学部・教授
研究者番号：00172354

小森 洋平 (KOMORI YOHEI)
大阪市立大学大学院理学研究科・准教授
研究者番号：70264794

須川 敏幸 (SUGAWA TOSHIYUKI)
東北大学情報科学研究科・教授
研究者番号：30235858

シャクレトン ケネス
(Shackleton Kenneth)
東京大学数物連携宇宙研究機構・
特任研究員
研究者番号：70536870