

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 16 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2010～2014

課題番号：22340019

研究課題名(和文)非可換確率論における情報幾何学的方法の探究

研究課題名(英文)Exploring Information Geometrical Methods in Noncommutative Probability Theory

研究代表者

藤原 彰夫 (Fujiwara, Akio)

大阪大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：30251359

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,400,000円

研究成果の概要(和文)：非可換確率論における情報幾何学的方法の確立を目指し、以下の研究を行った。1) 繰り込み群の情報幾何構造の研究、2) 量子攪乱パラメタの情報幾何構造の研究、3) Finsler情報幾何構造の研究、4) 量子単調計量の平坦化可能性の研究、5) 適応的量子パラメタ推定理論の実験的検証、6) 量子局所漸近正規性の研究、7) Chentsovの定理の拡張、8) サンドイッチ型量子Renyi相対エントロピーが誘導する情報幾何構造の研究。

研究成果の概要(英文)：Aiming at establishing quantum information geometrical methods in noncommutative statistics, we studied the following: 1) Information geometry of renormalization groups, 2) Information geometry of quantum nuisance parameters, 3) Finslerian information geometry, 4) Flattenability of quantum monotone metrics, 5) Experimental verification of adaptive quantum state estimation theory, 6) Quantum local asymptotic normality, 7) Chentsov's theorem revisited, 8) Information geometrical structure induced from sandwiched quantum Renyi relative entropy.

研究分野：数物系科学

キーワード：情報幾何学 量子確率空間 量子統計学

1. 研究開始当初の背景

情報幾何学は、確率分布族の有する自然な微分幾何構造の研究から始まり、1980年代前半に基本的枠組みが提唱された比較的新しい研究分野である。研究代表者はこれまで、情報幾何構造の量子確率空間への拡張を押し進めると共に、量子推定理論や量子情報理論の諸問題への応用にも取り組んできた。しかし、古典統計学の場合と異なり、非可換確率論全般に適用可能な幾何学的方法の構築には至っていなかった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、情報幾何学および量子情報理論の諸分野における断片的研究成果を統合・発展させ、「非可換確率論における情報幾何学的方法」とでも呼ぶべき一般的方法論の体系化を目指すと共に、量子情報科学における新しい問題を発掘し、それらに応用していくことにある。

3. 研究の方法

研究代表者、研究分担者、連携研究者、および共同研究者の間で、当該研究に対する問題意識や方法論、さらにはこれまでの研究成果を互いに共有し、緊密な協力体制を維持しつつ、個々のアイデアを尊重し、準理論的な研究を行った。

4. 研究成果

(1) 繰り込み群の情報幾何：統計物理学において相転移現象を扱う標準的方法の一つに繰り込み群の方法がある。本研究では、繰り込み方程式の不動点が情報幾何学的にどのような意味を有するかについて検討した。特に厳密な繰り込みが可能な1次元Isingスピン系およびダイヤモンドフラクタル系の繰り込みを確率分布空間の力学系として捉えることを試みた。

(2) 量子攪乱パラメタの情報幾何：2準位量子系の量子状態はStokesパラメタとよばれる3次元パラメタを座標系に持つ。そこで、その部分パラメタの推定問題、すなわち1パラメタもしくは2パラメタモデルの推定問題を、残りの自由度を攪乱パラメタと見なす観点から研究した。そして、攪乱パラメタ存在下での最適推定量の存在とe-平行ベクトル場の積分多様体の存在が深く関係していることを明らかにした。

(3) Finsler 情報幾何学：情報幾何学は通常、Riemann 幾何学の一般化と見なされるが、Finsler 幾何学的視点を援用することによってはじめてその本質が捉えられる非可換統計学的問題の存在を明らかにした。一般化amplitude-damping 量子通信路の推定問題を考えよう。熱浴の温度一定という条件下でdamping パラメタ を推定する問題では、最適入力が一様に依存することが研究代

表者の先行研究で示されているが、本研究では、熱浴の温度に対応するパラメタ p も同時に推定する問題を扱った。その結果、出力状態族の量子Fisher計量を最大化する入力は、接空間上のどの方向に着目するかに依存することが明らかになった。言い換えれば、一般化amplitude-damping 量子通信路多様体の接空間はRiemann計量を許容せず、Finsler計量構造を有することになる。本研究では、そのFinsler計量を接バンドル上の関数として陽に与えることにも成功し、 $p=1/2$ が特異点となること、非特異点においても計量は C^1 級ではあるが C^2 級ではないこと、などを明らかにした。Finsler 情報幾何学は研究の端緒についたばかりであり、ひな形になる先行研究も全くないので、例えばどのような接続構造が統計学的に自然な解釈を許容するのかなど、基礎的な未解決問題が山積する興味深い研究方向である。

(4) 量子単調計量の平坦化可能性：Petz による量子単調計量の特徴付けは、古典情報幾何学におけるFisher計量と接続の絶対的優位性を意味するChentsovの定理の量子版の確立に向けての重要なステップであると考えられている。このため、従来の量子情報幾何学では、単調計量と混合型接続を出発点として、その双対接続を定義することで双対幾何構造を導入するのが標準的な方法であった。これに対し本研究では、混合型接続自体を絶対視せず、与えられた単調計量が何らかの双対平坦構造を許容するかという問題を研究した。その結果、Hilbert空間が2次元という特殊な場合ではあるが、従来は振率を有する幾何構造の典型例と考えられていたSLD計量やRLD計量なども、双対平坦構造を許容するという予想外の実事明らかとなった。

(5) 適応的量子パラメタ推定理論の実験的検証：量子情報科学における情報幾何学的方法の新たな展開を図るため、量子光学の実験物理学者との共同研究を行い、光子の偏光方向をパラメタとする量子推定問題を研究した。その結果、SLD計量が定める量子Cramer-Rao型下限が適応的量子推定により達成可能であることを世界で初めて実験的に検証した。

(6) 量子局所漸近正規性の研究：量子状態空間上の量子統計的モデルに対する漸近的量子推定問題では、Le Cam型の局所漸近正規性が機能することにより、無限次元量子Gauss状態ソフトモデルに対する推定問題と同等な問題に埋め込んで議論できることが近年明らかにされつつある。これは初め、Gutaらによって2準位量子系のi.i.d.拡張に対して見いだされた事実であり、群の表現論や作用素代数的テクニックが適用できる限定された状況でのみ証明されていた。これに対し本研究では、量子分布収束の概念を用いるこ

とにより, 極めて一般的な状況下でも量子局所漸近正規性が成立することを証明した. この成功の鍵は, SLD 量子情報幾何学における測地線の型をヒントに, 対数尤度比の非可換拡張を従来の常識に捕われることなく新規に導入したことにあった. この事実は, 量子局所漸近正規性の成立要件において, 量子情報幾何構造が本質的な役割を担っていることを意味している.

(7)Chentsov の定理の拡張: Chentsov の定理は, 確率分布空間上の Markov 埋め込みに関する幾何構造の不変性を満たす古典確率分布空間上の計量・アフライン接続を特徴づけるものであり, Markov 不変性を満たす $(0, s)$ 型テンソル場を特徴づけることで証明される. 本研究ではこれを一般の (r, s) 型テンソル場に拡張し, Fisher 計量による添字の上げ下げに関して不変なテンソル場全体が閉じていることを証明した. 本結果は古典確率分布空間における Markov 不変な一般の型のテンソル場の特徴づけに関するものであり, Chentsov の定理を量子確率空間へ拡張する際にも重要な視点を提供するものと期待される.

(8)サンドイッチ型量子 Renyi 相対エントロピーの情報幾何: 近年進展が著しい量子仮説検定理論で重要な役割を果たすサンドイッチ型量子 Renyi 相対エントロピーが量子状態空間に誘導する情報幾何構造の研究を行い, 単調計量および接続構造を特徴づけることに成功した.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 17 件)

1 T.Kubo and H.Nagaoka, "A Fundamental Inequality for Lower-bounding the Error Probability for Classical and Quantum Multiple Access Channels and Its Applications," IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics Communications and Computer Sciences, vol.E98-A, pp.2376-2383 (2015). 【査読あり】

2 S.Eguchi, O.Komori, and A.Ohara, "Duality in a maximum generalized entropy mode," Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering (MaxEnt2014), (Ali Mohammad-Djafari and Frederic Barbaresco eds.) AIP proceedings, vol.1641, pp.297-304 (2015). 【査読あり】

3 S.Eguchi, O.Komori, A.Ohara, "Duality of maximum entropy and minimum divergence," Entropy, vol.16,

pp.3552-3571 (2014). 【査読あり】

4 K.Yamagata, A.Fujiwara, and R.D.Gill, "Quantum local asymptotic normality based on a new quantum likelihood," Annals of Statistics, vol.41, pp.2197-2217 (2013). 【査読あり】

5 A.Ohara and S.Eguchi, "Group invariance of information geometry on q-Gaussian distributions induced by beta-divergence," Entropy, vol.15, 4732-4747 (2013). 【査読あり】

6 T.Kanamori and A.Ohara, "A Bregman extension of quasi-Newton updates II: Analysis of robustness properties," Journal of Computational and Applied Mathematics, vol.253, pp.104-122 (2013). 【査読あり】

7 S.Kakihara, A.Ohara, and T.Tsuchiya, "Information geometry and interior-point algorithms in semidefinite programs and symmetric cone programs," Journal of Optimization Theory and Applications, vol.157, pp.749-780 (2013). 【査読あり】

8 T.Kanamori and A.Ohara, "A Bregman extension of quasi-Newton updates I: An information geometrical framework," Optimization Methods and Software, vol. 28, pp.96-123 (2013). 【査読あり】

9 R.Okamoto, M.Iefuji, S.Oyama, K.Yamagata, H.Imai, A.Fujiwara, and S.Takeuchi, "Experimental demonstration of adaptive quantum state estimation," Physical Review Letters, vol.109, 130404 (2012). 【査読あり】

10 T.Kubo and H.Nagaoka, "Lower Bounds on the Error Probability in Classical and Quantum State Discrimination," Proc. ISITA2012, pp.299-302 (2012). 【査読あり】

11 長岡浩司, "指数型分布族, 混合型分布族, そして相対エントロピー: ある情報幾何学的考察" 第35回情報理論とその応用シンポジウム予稿集, pp.106-111 (2012). 【査読なし】

12 T.Wada, A.Ohara, and A.Scarfone, "Relationships between the Legendre structure in the S_{2-q} -formalism and the dually-flat structure in the space of escort distributions," Reports on Mathematical Physics, vol.70, pp.181-192

(2012). 【査読あり】

13 S.-I.Amari, A.Ohara, and H.Matsuzoe, "Geometry of deformed exponential families: Invariant, dually-flat and conformal geometries," *Physica A*, vol.391, pp.4308-4319 (2012). 【査読あり】

14 A.Ohara, H.Matsuzoe, and S.-I.Amari, "Conformal geometry of escort probability and its applications," *Modern Physics Letters B*, vol.26, 1250063 (2012). 【査読あり】

15 坂下達哉, 片桐孝洋, 長岡浩司, 量子 i.i.d. 状態の仮説検定に関する数値的手法とその誤差分析, *情報処理学会論文誌 コンピューティングシステム (ACS)*, vol.4, pp.214-227 (2011). 【査読あり】

16 S.-I.Amari and A.Ohara, "Geometry of q-exponential family of probability distributions," *Entropy*, vol.13, pp.1170-1185 (2011). 【査読あり】

17 T.Sakashita and H.Nagaoka, "A Numerical Study of Hypothesis Testing for Quantum I.I.D. States," *Proceedings of AQIS2010*, 213-214 (2010). 【査読あり】

[学会発表](計17件)

1 藤原彰夫, "Amari-Chentsov のパラドクス" 数理と工学の接続と調和ワークショップ, 2016年2月27日~28日, KKR ホテル熱海(熱海)

2 長岡浩司, "相対エントロピーと指数型分布族をめぐる断章" 数理と工学の接続と調和ワークショップ, 2016年2月27日~28日, KKR ホテル熱海(熱海)

3 小原敦美, "すれちがったある問題" 数理と工学の接続と調和ワークショップ, 2016年2月27日~28日, KKR ホテル熱海(熱海)

4 久保卓也, 長岡浩司, "古典量子多重アクセス通信路における弱逆性に関する考察" 第38回情報理論とその応用シンポジウム, 2015年11月24日~27日, 下電ホテル(岡山)

5 A.Ohara, "Information geometry on multivariate generalized Gaussian densities and its group invariance," *ICMS Workshop on Computational Information Geometry for Image and Signal Processing*, 21-25 September 2015, Edinburgh (UK)

6 A.Fujiwara, "Experimental demonstration of adaptive quantum state estimation," *Quantum Information Workshop*, 17-18 February 2015, National Institute of Informatics (Tokyo)

7 A.Ohara, "On representing functions of probability distributions and conformal flattening," *Workshop on Information Geometry for Machine Learning*, 3-5 December 2014, RIKEN (Wako)

8 A.Fujiwara, Weak local asymptotic normality in the quantum domain, *Oberwolfach Workshop (ID 1437): New Horizons in Statistical Decision Theory*, 7-13 September 2014, Oberwolfach (Germany)

9 A.Ohara, "Construction of Legendre dualities for generalized entropies via conformal flattening and its applications," *International Conference in Statistical Physics 2014*, 7-11 July 2014, Rhodes (Greece)

10 A.Ohara, "Conformal flattening and generalized entropies: an affine differential geometric approach," *The Second International Workshop on Information Geometry and Affine Differential Geometry*, 11-12 April 2014, Shanghai (China)

11 A.Fujiwara, "Convex games, randomness, and geometry," 研究集会「エルゴード理論, 情報理論, 計算機科学とその周辺」, 2013年3月14日~16日, 大阪大学(大阪)

12 A.Fujiwara, "Experimental realization of adaptive quantum estimation," 第7回量子サイバネティクス総括班会議, 2012年6月21日~22日, ハイアットリージェンシー京都(京都)

13 A.Ohara, "Deformation of the Legendre structures and gradient flows on the simplex," *The International Workshop on Anomalous Statistics, Generalized Entropies, and Information Geometry*, 6-10 March 2012, Nara Women's University (Nara)

14 A.Fujiwara, "Experimental verification of adaptive quantum estimation," 第5回量子サイバネティクス総括班会議, 2011年6月29日-30日, ハイアットリージェンシー京都(京都)

15 A.Ohara, “Conformal geometry of escort probabilities and its application to Voronoi partitions,” International Conference in Statistical Physics 2011, 11-15 July 2011, Larnaca (Cyprus)

16 藤原彰夫, “量子統計学における情報幾何学的方法” 諸科学の共通言語としての数学の発掘と数理科学への展開, 2011年2月22日～23日, 国際高等研究所(京都)

17 A.Fujiwara, “Geometry of quantum channel manifolds,” Information Geometry and Its Applications III, 2-6 August 2010, Leipzig (Germany)

〔図書〕(計1件)

1 藤原彰夫, 牧野書店, 情報幾何学の基礎, 2015, 223

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~fujiwara>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤原 彰夫 (FUJIWARA, Akio)

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号: 30251359

(2) 研究分担者

長岡 浩司 (NAGAOKA, Hiroshi)

電気通信大学・情報システム学研究科・教授

研究者番号: 80192235

(3) 連携研究者

小原 敦美 (OHARA, Atsumi)

福井大学・工学研究科・教授

研究者番号: 90221168

満淵 俊樹 (MABUCHI, Toshiki)

大阪大学・理学研究科・名誉教授

研究者番号: 80116102