

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 3月31日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2010～2012

課題番号：22340037

研究課題名（和文） 非線形特殊関数の大域的研究とその応用

研究課題名（英文） Global study of nonlinear special functions and its application

研究代表者

下村 俊 (SHIMOMURA SHUN)

慶應義塾大学・理工学部・教授

研究者番号：00154328

研究成果の概要（和文）： Painleve 方程式(V) の truncated solutions の固有な角領域の外側における極, a -点の分布を明らかにした. 差分 Painleve 方程式(dII) の一部の解がその差分幅を 0 に近づけたとき Painleve 方程式(II) の解に近づいていく様子を(dII)の解の差分幅に関する漸近表現を求めることにより明らかにした. (dII)をふくむ幾つかの差分方程式についてすべての有理関数解を求めた. Riemann の zeta 関数の 4 乗平均について, その 2 乗分を critical line 上でずらしたときにどのように変化するかをあらわす漸近表現式を得た.

研究成果の概要（英文）： For truncated solutions of the Painleve equation (V), we estimated the frequency of a -points including poles outside their proper sectors. For the difference Painleve equation (dII) we obtained asymptotic expressions of certain solutions describing how these solutions of (dII) approach asymptotic solutions of the Painleve equation (II) as the step of difference tends to zero. For difference Painleve equation including (dII) we obtained all the rational solutions. We obtained asymptotic expressions for the shifted fourth moment of the Riemann zeta-function along the critical line.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2011年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2012年度	1,300,000	390,000	1,690,000
年度			
年度			
総計	4,100,000	1,230,000	5,330,000

研究分野：大域解析学

科研費の分科・細目：数学, 解析学基礎

キーワード : Painleve 方程式 漸近表現 差分 Painleve 方程式 Riemann zeta-function

4 乗平均 Ramanujan q-series ドイツ:アメリカ 国際研究者交流

1. 研究開始当初の背景

Painleve 超越関数をはじめとする非線形特殊関数がいろいろな分野で注目を集めていた. そしてそれらの超越関数としての性質をいろいろな角度から研究することは重要な問題であるということが多くの人たちに認識されていた.

2. 研究の目的

Painleve 方程式の解の大域的性質をいろいろな角度から明らかにする. さらにその差分版との関係を調べる. できればそれらの高階版についてもこれらの結果の拡張を目指す. またこのように微分方程式, 差分方程式により定義される関数のみならず, 整数論などの分野に関連した他の特殊関数についても興味を赴くままに研究する.

3. 研究の方法

値分布論を中心とした複素関数論, WKB 解析まで含めた漸近解析, モノドロミー保存変形, 超幾何関数, 楕円関数などを中心とした特殊関数論における諸結果を利用することにより非線形方程式の解の性質を明らかにする. 特に Painleve 方程式 (III), (V) の解は一般には無限多価なので角領域で考える必要がある. そのために平面ではなく, 半平面もしくは角領域における有理型関数論の理論を必要とする.

その他可能で有効と思われる方法は何でも使用する.

4. 研究成果

(1) Painleve 方程式 (V) の指数関数的に減少する解について, 有界でないところでの様子を調べた. 指数関数により表現される角領域の外側においては極も含めたすべての値を同程度にとるという事実を証明した. またある適当な条件を満たす Painleve 方程式 (V) の解について角領域における a -点や極の個数についての上からの漸近的な評価を与えることができた. この結果は解析的に表現されるほとんどすべての解に適用できるので, 上で述べた指数関数的に振舞う解についても a -点や極の個数についての上からの評価が得られる.

(2) 差分 Painleve 方程式 (dII) と Painleve 方程式 (II) についての関係を, 方程式の外

見の形式的な極限関係よりもさらに深い漸近解の極限関係のレベルにおいて明らかにした. (dII) の半平面における解を構成し, この解は差分幅を 0 に近づけたとき (II) の 0-パラメーター解に近づくことを証明した. この事実は (dII) の有理関数解については知られていたが, 超越的な解についても成り立つことを示したことになる. また (II) の 1-パラメーター解に点列として収束するような (dII) の解も作ることができた. なおこれらの (dII) の解が全平面に有理型関数として解析接続できるかどうかは不明である. また (dII) および Painleve (I) に対応するいくつかの差分 Painleve 方程式についてすべての有理関数解を求めた.

(3) Riemann zeta 関数の 4 乗平均の 2 乗部分を critical line の沿ってずらしたときどのように変化するかという問題を考え, ずらし幅を含む漸近公式を得た. ずらし幅が 0 に近い場合の表示式は良く知られている 4 乗平均の振動公式となっている. またずらし幅が比較的大きいときに必ずしも有界で無い場合も含めた公式も与えた. さらに 2 乗部分を実軸に沿ってずらした場合も考察しずらし幅が小さい場合, 大きい場合の 2 種類の漸近公式を求めた. 以上の結果を導くにあたり約数和関数のある種の漸近総和公式を利用している. そして証明全体においては, Montgomery-Vaughan の等式が本質的な役割を果たしている.

(4) Eisenstein 級数に含まれる定数が正整数のときこの関数についての 1, 2, 1/2 におけるある境界値は Bernoulli 数で表され, 定数が 4 以上の偶数のときその事実が Eisenstein 級数の保型性を表しているという結果が黒川により得られていた. 本研究では定数が複素数の Eisenstein 級数に対し, 正の実軸における境界値を与えることにより上の結果を拡張した. 特に, 有理数における境界値は Hurwitz zeta 関数の値により表現されることがいえた. またこの Eisenstein 級数に関連した Ramanujan q-series についての漸近公式を与え, それを用いて Chazy 方程式の解の自然境界付近でのふるまいや q-zeta 関数の q が単位円に近づくときの様子を調べた.

(5) Fibonacci 数の逆数和よりなるある数列に対し, それに含まれる有限な数よりなる組を考えたとき, それらのうちで含まれる数が互いに代数的に独立となるものをすべて決

定した。さらに Ramanujan q -series を含む何種類かの q -series について、そのある系列に属する数もしくは関数について、代数関係式および代数的独立性について論じた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 18 件)

1. Shun Shimomura, Frequency of a -points for the fifth and the third Painleve transcendents in a sector, to appear in Tohoku Math. J. 査読有
2. Shun Shimomura, Fourth moment of the Riemann zeta-function with a shift along the real line, to appear in Tokyo J. Math. 査読有
3. Carsten Elsner, Shun Shimomura and Iekata Shiokawa, Algebraic independence of certain numbers related to modular functions, *Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici* 47 (2012), 121-141. 査読有
4. Shun Shimomura, Shifted fourth moment of the Riemann zeta-function, *Acta Math. Hungarica* 137 (2012), 104-129. 査読有
5. Shun Shimomura, Rational solutions of difference Painleve equations, *Tokyo J. Math.* 35 (2012), 85-95. 査読有
6. Shun Shimomura, Continuous limit of the difference second Painleve equation and its asymptotic solutions, *J. Math. Soc. Japan* 64 (2012), 733-781. 査読有
7. Hiromichi Itou, A. M. Khludnev, E. M. Rudoy and Atusi Tani, Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 92 (2012), 716-730. 査読有
8. Hirotada Honda and Atusi Tani, Small-time existence of a strong solution of primitive equations for the ocean. *Tokyo J. Math.* 35 (2012), 97-138. 査読有
9. Carsten Elsner, Shun Shimomura and Iekata Shiokawa, Exceptional algebraic relations for reciprocal sums of Fibonacci and Lucas numbers, *Diophantine Analysis and Related Fields DARF 2011, AIP Conference Proceedings* 1385, American Institute of Physics, Melville, New York (2011), 17-31. 査読無
10. Shun Shimomura, Truncated solutions of the fifth Painleve equation, *Funkcial. Ekvac.* 54 (2011), 451-471. 査読有
11. Carsten Elsner, Shun Shimomura and Iekata Shiokawa, Algebraic independence results for reciprocal sums of Fibonacci numbers, *Acta Arithmetica* 148 (2011), 205-223. 査読有
12. V. Yu. Liapidevskii, V. V. Pukhnachev and Atusi Tani, Nonlinear waves in incompressible viscoelastic Maxwell medium. *Wave Motion* 48 (2011), 727-737. 査読有
13. Shintaro Kondo and Atusi Tani, On the Hasegawa-Wakatani equations with vanishing resistivity. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 87 (2011), 156-161. 査読有
14. Shintaro Kondo and Atusi Tani, Initial boundary value problem of Hasegawa - Wakatani equations with vanishing resistivity. *Adv. Math. Sci. Appl.* 21 (2011), no. 1, 223-253. 査読有
15. Carsten Elsner, Shun Shimomura and Iekata Shiokawa, Algebraic relations for reciprocal sums of even terms in Fibonacci numbers (Russian), *Fundam. Prikl. Mat.* 16 (2010), 173-200; *Engl. transl. J. Math. Sci.* 180 (2012), 650-671. 査読有
16. Carsten Elsner, Shun Shimomura and Iekata Shiokawa and Yohei Tachiya, Algebraic independence results for the sixteen families of q -series, *Ramanujan J.* 22 (2010), 315-344. 査読有
17. Shun Shimomura, Modularity gap for Eisenstein series, *Proc. Japan Acad. Ser. A* 86 (2010), 79-84. 査読有

18. Carsten Elsner, Shun Shimomura and Iekata Shiokawa, A remark on Nesterenko's theorem for Ramanujan functions, Ramanujan J. 21 (2010), 211-221. 査読有

6. 研究組織

(1) 研究代表者

下村 俊 (SHIMOMURA SHUN)

慶應義塾大学・理工学部・教授

研究者番号：00154328

(2) 研究分担者

塩川 宇賢 (SHIOKAWA IEKATA)

慶應義塾大学・理工学部・名誉教授

研究者番号：00015835

谷 温之 (TANI ATUSI)

慶應義塾大学・理工学部・名誉教授

研究者番号：90118969

(3) 連携研究者

該当なし