

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 4 月 11 日現在

機関番号：50103

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2012

課題番号：22500020

研究課題名（和文）交差グラフにおける離散最適化問題を解く効率的アルゴリズムの開発

研究課題名（英文）Development of efficient algorithms for solving the discrete optimization problems on intersection graphs.

## 研究代表者

本間 宏利 (HONMA HIROTOSHI)

釧路工業高等専門学校・情報工学科・准教授

研究者番号：80249721

研究成果の概要（和文）：交差グラフの一種である台形グラフにおける Feedback 節点集合問題を解くための計算量  $O(n^2) + \alpha$  時間の効率的アルゴリズムを開発した。また、環状型置換グラフにおける関節点問題および要節点問題を解くための計算量  $O(n^2)$  の最適並列アルゴリズムを開発した。

研究成果の概要（英文）：We developed an efficient algorithm for solving the feedback vertex set problem on trapezoid graphs. Furthermore, we constructed optimal parallel algorithms for solving the articulation vertex and hinge vertex problems on circular permutation graphs.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
2012年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,800,000	540,000	2,340,000

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：アルゴリズム理論・離散最適化・交差グラフ

## 1. 研究開始当初の背景

ネットワーク構造を有するグラフにおける離散最適化問題は、資源配分、スケジューリング、最適配置などの広い分野で精力的に研究され、多くの問題解決において実用化されている。このような背景のもと、研究代表者はこれまでにアルゴリズム設計において、多項式時間アルゴリズムは存在するものの、グラフが大規模になると非常に多くの計算時間を必要とする問題（具体的には要節点問題、全域林問題）に対して、対象となるグラフを交差グラフのクラス（具体的には区間グラフ、置換グラフ、円弧グラフ等）に限定し、

それらの上での最適あるいは効率的な並列アルゴリズムを研究、開発してきている。

これらの離散最適化問題はグラフ理論分野での計算量理論からの視点でも興味深い内容であり、実践的な応用と計算理論上の進展の両面から意義がある。

## 2. 研究の目的

本研究では実システムや問題本質のモデル化等に利用される交差グラフに属するグラフに対して、以下の2つのテーマで研究を行った。

- (1) 台形グラフにおける Feedback 節点集合問題を解く効率的なアルゴリズムの開発
- (2) 環状型置換グラフにおける関節点問題, および, 要節点問題を解く最適並列アルゴリズムの開発

テーマ(1)で扱う台形グラフは区間グラフと置換グラフの両方の特性を含むスーパークラスの交差グラフとして, これまで認識問題, 支配集合問題, 彩色問題, 全域林問題など, 多くの離散最適化問題で研究対象にされてきている.

Feedback 節点集合問題 (Feedback Vertex Set Problem) とは, それらをグラフから除去すると, グラフに閉路が存在しなくなるような節点位数最小の節点集合 (Minimum FVS) を導出する問題である. この問題は大規模回路解析の簡潔化やコンピュータシステム上のデッドロック回避等に应用されている. また, Feedback 節点集合問題は一般のグラフに対しては NP 完全であり, 有効な解法が存在しないと予想される問題であるが, 対象とするグラフを台形グラフに限定することによって, 非常に効率的なアルゴリズム実現の可能性が高いと考えられる. これまでに Feedback 節点集合問題は区間グラフに対しては  $O(n+m)$  時間, 置換グラフに対しては  $O(nm)$  時間のダイナミックプログラミング手法を適用した逐次アルゴリズムが構築されている. 本研究では, 台形グラフの全極大クリークを導出し, 各クリークから閉路を構成する最小の節点を削除する手法によって効率的なアルゴリズムの開発を試みる. 図 1 に台形グラフと MFVS をあげる.

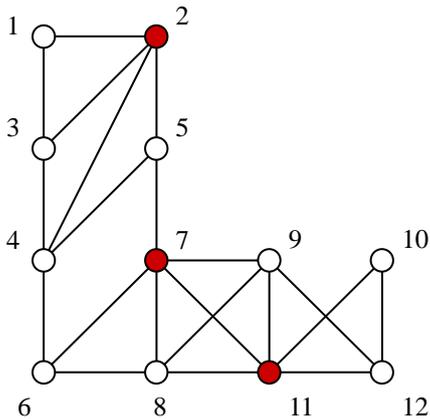


図 1 台形グラフと MFVS

テーマ(2)で扱環状型置換グラフは VLSI 結線のイメージをモデル化した環状型置換モデルから導出される交差グラフであり, これは置換グラフの特性をすべて含むスーパークラスのグラフとして知られている. この環状型置換グラフはこれまで最大クリーク問

題・独立集合問題, 認識問題, 全域木問題など多くの研究がなされてきている. 図 2 に環状型置換モデルとそれに対応する環状型置換グラフの例をあげる.

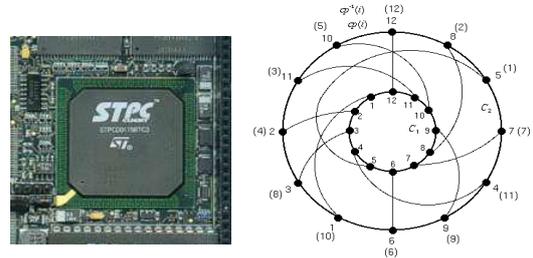


図 2 環状型置換グラフ

関節点問題とは, ある節点をグラフから削除した時, そのグラフが 2 つ以上の成分に分断される時, その削除した節点を関節点とよび, そのような全ての関節点を導出する問題を関節点問題という. また, 要節点問題とは, ある節点をグラフから削除した時, 最短距離が今までより長くなるような 2 つの節点が存在する時, その削除した節点を要節点とよび, そのような全ての要節点を導出する問題を要節点問題という.

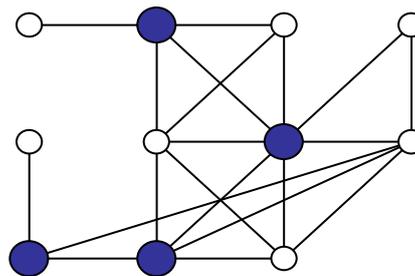
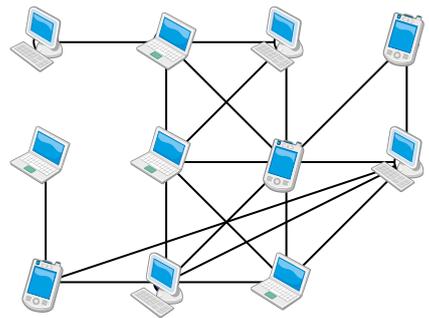


図 3 ネットワーク上の要節点

要節点はグラフの連結性や最短経路に関わる重要な節点であり、例えばグラフをコンピュータネットワークと考えた場合、トラフィック伝達の安定的な供給において最重要となるポイントとなる。このように関節点問題や要節点問題はネットワークシステム解析や信頼性、安定性、頑健性の向上に応用されている。図3にコンピュータネットワーク上の要節点の例をあげる。

テーマ(1)(2)のアルゴリズムは大規模ネットワーク構造を有するシステム上の信頼性、安定性、頑健性の向上などに応用可能であり、効率的なアルゴリズムの研究の重要性が高い。

### 3. 研究の方法

(1)の台形グラフにおけるFeedback節点集合問題を解く効率的アルゴリズムの開発では、これまでに開発されてきた他の交差グラフに有効であったダイナミックプログラミングアプローチは、台形グラフに対してはその幾何学的特徴から不向きであることがわかった。そのため、別のアプローチとして台形グラフの全極大クリークと長さ4の単純閉路の集合を導出し、それらの各成分から閉路を構成する最小限の節点を削除する手法でFeedback節点集合を求めるアルゴリズムを構築した。図4に台形グラフの極大クリークと閉路長4のサイクル分解の例をあげる。

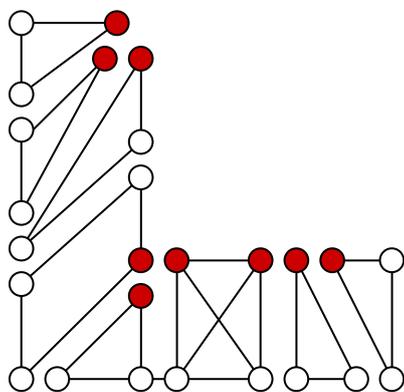


図4 極大クリーク分解

具体的な手法を述べる。はじめに与えられた台形グラフを既存の手法により極大クリーク集合へ分解する。また、長さ4の閉路も既存のアルゴリズムにより導出を行う。台形グラフの特性として、閉路長5以上の単純閉路は存在しないため、台形グラフの持つ閉路は、いずれかな極大クリークか長さ4の閉路に含まれることになる。次に位数最小のFeedback節点集合を導出するが、ここで台形グラフの各節点に対し、その節点を要素に含

む極大クリークと長さ4の閉路の総数を求める。これを閉路次数とよぶ。位数最小のFeedback節点集合を求めるには、閉路次数の大きな節点から優先的にFeedback節点集合に選ばばよいことは明らかである。各極大クリークが無閉路になるためには、極大クリークを構成する節点数より、2個少ない数だけFeedback節点集合に加えればよい。これにより、台形グラフ台形グラフにおけるFeedback節点集合問題を解く効率的アルゴリズムを開発した。

(2)の環状型置換グラフにおける関節点問題と要節点問題では、環状型置換グラフの部分クラスである置換グラフにおける関節点問題や要節点問題を解く  $O(n)$ 時間のアルゴリズムがすでに存在しているので、これらの手法を環状型置換グラフに適宜部分的に応用させる方法を考案した。そのためには、環状型置換モデルをその特性を失わせることなく、意味的に等価な非環状型モデルに展開した拡張環状型置換モデルを構成し、それに対して部分的に既存の手法を適合させる方法を導入した。

アルゴリズムの概略を述べる。置換グラフに対しての関節点を導出するアルゴリズムは、置換グラフに対応する置換モデル上のコードに着目し、あるコードをモデルから除去した時に置換ダイアグラムが2つ以上のコード群に分解されるなら、そのコードに対応する節点を置換グラフの関節点として導出する手法である。我々は、環状型置換グラフへのアルゴリズム拡張にあたり、対応する拡張環状型置換モデルのあるコードを削除した時、拡張環状型置換モデルが3つ以上のコード群に分解されるなら、そのコードに対応する節点が環状型置換グラフの関節点となる規則を証明した。これにより、環状型置換グラフの関節点問題を解くアルゴリズムを開発した。

また、環状型置換グラフの要節点問題でも、すでに置換グラフに対してのアルゴリズムが存在しているため、その環状型置換グラフへの拡張に注力した。要節点はある隣接しない2つの節点に対し、それら両方に隣接する唯一の節点であるという特性を持つ。置換グラフに対しての要節点問題アルゴリズムは、対応する置換モデルの各コードに対して、この特性が満たされているかどうかを調べ、この条件を満たすコードに対応する節点を要節点として認識する。我々は、環状型置換グラフにおいて、要節点判別のための十分条件を考案し、その十分条件を条件を拡張環状型置換モデルの各コードに適用させる手法で環状型置換グラフの要節点問題を解くアルゴリズムを開発した。

#### 4. 研究成果

(1) 台形グラフにおける Feedback 節点集合問題を解く効率的アルゴリズムの開発では、計算量  $O(n^2) + \alpha$  時間で処理可能な効率的アルゴリズムを構築した。  $n$  は台形グラフの節点数、  $\alpha$  は極大クリークの総数である。このアルゴリズムはジョブ制御のデッドロック解消やフィードバック構造を有する大規模回路解析の単純化などへの応用が可能である。

(2) 環状型置換グラフにおける関節点問題、および、要節点問題を解く最適並列アルゴリズムの開発では、それぞれの問題に対して仕事量  $O(n)$  時間で処理可能な最適並列アルゴリズムを構築した。  $n$  は環状型置換グラフの節点数である。これらのアルゴリズムはネットワークシステム解析や信頼性、安定性、頑健性の向上に応用が可能である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

① Hirotoshi Honma, Yoko Nakajima, Haruka Aoshima and Shigeru Masuyama, A Linear-time Algorithm for Constructing a Spanning Tree on Circular Trapezoid Graphs, In press IEICE TRANSACTIONS on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 査読有, 2013.

② Hirotoshi Honma, Kodai Abe, Yoko Nakajima and Shigeru Masuyama, Linear time Algorithms for Finding Articulation and Hinge Vertices of Circular Permutation Graphs, IEICE TRANSACTIONS on Information and Systems, 査読有, Vol. E96D, No.3, pp. 419-425, 2013  
DOI:10.1587/transfun.E96.D.419

③ Hirotoshi Honma and Kodai Abe and Shigeru Masuyama, Erratum and Addendum to "A linear time algorithm for finding all hinge vertices of a permutation graph", Information Processing Letters, 査読有, Vol. 111, pp. 891-894, 2011  
DOI:10.1016/j.ipl.2011.01.014

④ Hirotoshi Honma and Yutaro

Kitamura and Shigeru Masuyama, An Algorithm for Minimum Feedback Vertex Set Problem on a Trapezoid Graph, IEICE TRANSACTIONS on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 査読有, Vol. E94A, No.6, pp. 1381-1385, 2011  
DOI:10.1587/transfun.E94.A.1381

[学会発表] (計 3 件)

① 本間宏利, 増山繁, Circular permutation graph における要節点導出のための最適並列アルゴリズム, 日本オペレーションズリサーチ学会, 長崎大学, 2010.

② 本間宏利, 増山繁, 影響度最大の要節点導出のための効率的アルゴリズム, 日本オペレーションズリサーチ学会, 甲南大学, 2011.

③ 本間宏利, 増山繁, 環状型台形グラフの全域木導出のための最適アルゴリズム, 日本オペレーションズリサーチ学会, 東京大学, 2013.

#### 6. 研究組織

(1) 研究代表者

本間 宏利 (HONMA HIROTOSHI)  
釧路工業高等専門学校・情報工学科・准教授  
研究者番号: 80249721

(2) 研究分担者

増山 繁 (MASUYAMA SHIGERU)  
豊橋技術科学大学・大学院工学研究科・教授  
研究者番号: 60173762