

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 4 月 19 日現在

機関番号：33917

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22500256

研究課題名(和文) 相補性とそれに関連する諸問題に対する手法

研究課題名(英文) Methods for Complementarity and Related Problems

研究代表者

福島 雅夫 (Fukushima, Masao)

南山大学・情報理工学部・教授

研究者番号：30089114

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円、(間接経費) 990,000円

研究成果の概要(和文)：相補性は最適化問題の最適性条件やさまざまな均衡問題の定式化において本質的に重要な役割を果たすものであり、最適化・数理計画におけるもっとも基本的な概念のひとつである。本研究では相補性とそれに関連する問題として、固有値相補性問題、2次錐相補性制約をもつ最適化問題、非線形2次錐計画問題、ナッシュ均衡問題、一般化ナッシュ均衡問題、マルチ・リーダー・フォロワー・ゲーム、などの諸問題に対して、堅固な理論的基盤に立脚する実用的な手法を開発した。

研究成果の概要(英文)：Complementarity is one of the most fundamental concepts in mathematical optimization, which plays an essentially important role in the optimality conditions of optimization problems and the formulation of various equilibrium problems. In this study, we have developed practical methods with a solid theoretical basis, for complementarity and related problems including eigenvalue complementarity problems, optimization problems with second-order cone complementarity constraints, nonlinear second-order cone programming problems, Nash equilibrium problems, generalized Nash equilibrium problems, and multi-leader-follower games.

研究分野：最適化理論

科研費の分科・細目：情報学・統計科学

キーワード：相補性 最適化問題 均衡問題 ゲーム理論 変分不等式 2次錐計画問題

1. 研究開始当初の背景

最適化理論において、相補性はカルーシユ・キューン・タッカー条件をはじめ、いたるところに現れる基本的な概念の一つであり、古くから線形相補性問題・非線形相補性問題あるいは変分不等式問題など均衡問題の定式化においても本質的な役割を演じてきた。さらに、本研究の開始当初には、より一般的な半正定値相補性問題や2次錐相補性問題、あるいは相補性問題を制約条件に内包する相補性制約をもつ数理計画問題や不確実性下での相補性問題など、幅広い応用をもつ興味深い問題が次々に現れ、新しい成果が生まれつつあった。

2. 研究の目的

相補性は最適化・数理計画における最も基本的な概念のひとつである。相補性とは、一般的には、ベクトル空間の自己双対な閉凸錐に含まれる2つのベクトルが直交することを意味するが、そのような性質は最適化問題の最適性条件やさまざまな均衡問題の定式化において本質的に重要な役割を果たすものであり、これまで様々な角度から研究されてきた。本研究の目的は、相補性の概念を中心軸に、密接に関連する変分不等式など各種の均衡問題・最適化問題に対して堅固な理論的基盤に立脚した実用的な手法を開発することにより、最適化理論の応用領域の拡大に寄与することである。

3. 研究の方法

研究代表者が単独で行った研究と他の研究者たちと共同で行った研究があるが、いずれの場合も個々の具体的な研究テーマに対して、取り組む問題および達成目標を設定したうえで、手法の開発やその理論的性質の解明、計算実験による有効性の検証などを行い、その結果を論文にまとめた。また、取り組む問題に応じて、海外の研究協力者の招聘や電子メールでのやりとりを通して、共同研究を行うことにより、いくつかの重要な成果を得た。

4. 研究成果

申請時の研究計画にあげたテーマに加えて、研究の進展に伴い、本研究課題に関連する多くの新たな成果が得られた。それらのうち主要なものを以下に要約する。なお、文中で参照する論文番号は次項「5. 主な発表論文等」の〔雑誌論文〕に記載した論文番号に対応する。

(1) 固有値相補性問題に対する手法の開発：行列の固有値問題を拡張した問題に固有値相補性問題と呼ばれる問題がある。本研究では、対称行列を含む固有値相補性問題をまず変分不等式に定式化し、さらにそれにギャップ関数法と呼ばれる技法を適用して最適化問題に再定式化することにより、固有値を計算する方法を開発した[10]。固有値相補性問題に関する研究は世界的にもまだ端緒にすぎたばかりであり、この研究成果は今後の研究の発展に貢献するものと期待できる。本

研究者は海外の研究者と共同して、この問題に継続して取り組んでおり、現在新しい成果を発表する準備を進めている。

(2) 2次錐相補性制約をもつ最適化問題に対する手法の開発：通常の相補性条件を制約にもつ最適化問題については従来から活発な研究が行われていたが、相補性制約を2次錐相補性制約に拡張した問題に対しては、本研究以前にはまとまった成果はほとんど見当たらなかった。本研究では、まず平滑化法と呼ばれる技法を用いて通常の2次錐最適化問題に近似したうえで、その最適解が元の問題の最適解に収束することを示した[19]。さらに、同様の平滑化によって得られた問題に逐次2次計画法と呼ばれる方法を適用することにより、最適解が効率的に得られることを示した[4]。これらの研究で得られた成果は、下位レベルに不確実性を含む2レベル階層的最適化問題など、新しいタイプの問題への応用が期待できる。

(3) 非線形2次錐計画問題に対する手法の開発：非線形2次錐計画問題に対して微分可能性を有する正確なペナルティ関数を提案し、それを解くことで元の問題の最適解が得られることを示した[8]。また、無限個の2次錐制約をもつ非線形最適化問題に対する効率的な反復手法を開発した[9]。さらに、実社会への応用として、スマートハウス運転計画問題を、相補性制約をもつ2次錐計画問題としてモデル化することにより、最適な運転計画が計算できることを示した[6]。従来から2次錐計画問題に対する研究は活発に行われているが、その大半は線形2次錐計画問題を対象としており、ここで得られた研究成果の価値は小さくない。

(4) ナッシュ均衡問題と一般化ナッシュ均衡問題に関する研究：非協力N人ゲームのナッシュ均衡はゲーム理論における最も基本的な概念の一つである。本研究では、ナッシュ均衡の拡張として、プレイヤーの戦略集合が他のプレイヤーの戦略に依存するという状況を仮定した一般化ナッシュ均衡を考え、いくつかの重要な結果を得た。まず、一般化ナッシュ均衡の一意性を期待するのは難しいため、数多くの均衡解が存在することを前提として、それらのすべてを系統的に計算する方法を開発した[18]。次に、数多くの均衡解から現実に意味のあるものを特徴付ける新しい解の概念を提案し、その計算法を与えた[17]（なお、この論文は当該論文誌の年間最優秀論文に選出された）。さらに、一般化ナッシュ均衡のなかでも特に正規化均衡と呼ばれる特別な性質をもつ解を計算するためのいくつかの方法を提案した[1, 13]。また、通常のナッシュ均衡の枠組みにおいて、プレイヤーが不確実な情報しかもたないという状況を考え、ロバスト最適化の考え方を適用したロバストナッシュ均衡の概念を提案し、その計算法を与えた[12]。実社会への応用として、製品の複数の供給者と需要者からなる

サプライチェーンを一般化ナッシュゲームとしてモデル化し, その均衡解を計算する方法を与えた[5]. これらの研究成果, 特に一般化ナッシュ均衡に関するいくつかの成果は, この分野における先駆的なものであり, すでに多くの論文によって引用されるなど (Google Scholar では論文[18],[17],[13]の引用数はそれぞれ 48, 42, 20 である), 大きなインパクトを与えている.

(5) マルチ・リーダー・フォロワー・ゲームに関する研究: リーダー (先手) と呼ばれるプレイヤーとフォロワー (後手) と呼ばれるプレイヤーが存在するゲームは, 特にリーダーが一人の場合, シュタッケルベルグ・ゲームと呼ばれ, 古くから研究されてきた. しかし, 複数のリーダーが存在する場合には, その取り扱いが非常に複雑になるため, 現在に至るまで, 系統的な研究はあまり行われていない. 本研究では, マルチ・リーダー・フォロワー・ゲームにおいてある特別な状況を仮定できるときには, 問題が変分不等式として定式化され, 均衡解が計算できることを示した[11,15]. 特に, 各プレイヤーが不確実な情報をもつ場合でも, ロバスト均衡の概念を用いて変分不等式として定式化でき, 適当な仮定の下で均衡解の存在と一意性が成立することを示すとともに, その計算法を与えた[2]. これらの成果により, 一般的には取り扱いが困難なマルチ・リーダー・フォロワー・ゲームにおいて, 有効なアプローチが存在する問題のクラスが具体的に示されたことの意義は大きく, この分野の研究が今後いっそう進展することが期待できる.

(6) 線形相補性問題の応用: 金融工学の重要な問題であるアメリカンオプション・プライシングにおいてボラティリティが不確実な場合を想定し, 確率的線形相補性問題の定式化を用いたオプションプライシングの方法を提案した[16]. また, 圧縮センシングなどの応用に関連して近年大きな注目を集めている L1-L2 問題に対して, 線形相補性問題の反復法が有効に適用できることを示した[14]. このように相補性に関連する問題に対する研究成果は実社会において様々な応用が可能である. 本研究を通して得られた各種の手法が最適化理論の応用分野の拡大に貢献することが期待できる.

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 20 件)

- [1] A. Dreves, A. von Heusinger, C. Kanzow and M. Fukushima, A globalized Newton method for the computation of normalized Nash equilibria, *Journal of Global Optimization* Vol.56 (2013), pp.327-340, 査読有. DOI:10.1007/s10898-011-9824-9
- [2] M. Hu and M. Fukushima, Existence,

uniqueness, and computation of robust Nash equilibria in a class of multi-leader-follower games, *SIAM Journal on Optimization* Vol.23 (2013), pp.894-916, 査読有. DOI:10.1137/120863873

[3] R. Nishimura, S. Hayashi and M. Fukushima, SDP reformulation for robust optimization problems based on nonconvex QP duality, *Computational Optimization and Applications* Vol.55 (2013), pp.21-47, 査読有. DOI:10.1007/s10589-012-9520-9

[4] H. Yamamura, T. Okuno, S. Hayashi and M. Fukushima, A smoothing SQP method for mathematical programs with linear second-order cone complementarity constraints, *Pacific Journal of Optimization* Vol.9 (2013), pp.345-372, 査読有. URL: <http://www.ybook.co.jp/online2/pjov9.html>

[5] J. Ang, M. Fukushima, F. Meng, T. Noda and J. Sun, Establishing Nash equilibrium of the manufacturer-supplier game in supply chain management, *Journal of Global Optimization* Vol.56 (2013), pp.1297-1312, 査読有. DOI:10.1007/s10898-012-9894-3

[6] 高須啓介, 田中洋一, 福嶋雅夫, 相補性制約をもつ非線形 2 次錐計画問題に対する平滑化法とスマートハウス運転計画問題への適用, システム制御情報学会論文誌 第 26 巻 (2013), pp.34-44, 査読有. URL: [https://www.jstage.jst.go.jp/article/iscie/26/1/26\\_34/\\_pdf](https://www.jstage.jst.go.jp/article/iscie/26/1/26_34/_pdf)

[7] Y.B. Zhao and M. Fukushima, Rank-one solutions for homogeneous linear matrix equations over the positive semidefinite cone, *Applied Mathematics and Computation* Vol.219 (2013), pp.5569-5583, 査読有. DOI: 10.1016/j.amc.2012.11.022

[8] E.H. Fukuda, P.J.S. Silva and M. Fukushima, Differentiable exact penalty functions for nonlinear second-order cone programs, *SIAM Journal on Optimization* Vol.22 (2012), pp.1607-1633, 査読有. DOI: 10.1137/110852401

[9] T. Okuno, S. Hayashi and M. Fukushima, A regularized explicit exchange method for semi-infinite programs with an infinite number of conic constraints, *SIAM Journal on Optimization* Vol.22 (2012), pp.1009-1028, 査読有. DOI:10.1137/110839631

[10] C.P. Bras, M. Fukushima, J.J. Judice and S.S. Rosa, Variational inequality formulation of the asymmetric eigenvalue complementarity problem and its solution by means of gap functions, *Pacific Journal of Optimization* Vol.8 (2012), pp.197-215, 査読有. URL: <http://www.ybook.co.jp/online2/pjov6-1.html>

[11] M. Hu and M. Fukushima, Smoothing approach to Nash equilibrium formulations for a class of equilibrium problems with

shared complementarity constraints, *Computational Optimization and Applications* Vol.52 (2012), pp.415-437, 査読有. DOI: 10.1007/s10589-011-9416-0

[12] R. Nishimura, S. Hayashi and M. Fukushima, Semidefinite complementarity reformulation for robust Nash equilibrium problems with Euclidean uncertainty sets, *Journal of Global Optimization* Vol.53 (2012), pp.107-120, 査読有. DOI:10.1007/s10898-011-9719-9

[13] A. von Heusinger, C. Kanzow and M. Fukushima, Newton's method for computing a normalized equilibrium in the generalized Nash game through fixed point formulation, *Mathematical Programming* Vol.132 (2012), pp.99-123, 査読有. DOI: 10.1007/s10107-010-0386-2

[14] M. Fukushima, SOR- and Jacobi-type iterative methods for solving  $l_1$ - $l_2$  problems by way of Fenchel duality, *Optimization Letters* Vol.6 (2012), pp.679-686, 査読有. DOI:10.1007/s11590-011-0292-4

[15] M. Hu and M. Fukushima, Variational inequality formulation of a class of multi-leader-follower games, *Journal of Optimization Theory and Applications* Vol.151 (2011), pp.455-473, 査読有. DOI: 10.1007/s10957-011-9901-8

[16] K. Hamatani and M. Fukushima, Pricing American options with uncertain volatility through stochastic linear complementarity models, *Computational Optimization and Applications* Vol.50 (2011), pp.263-286, 査読有. DOI:10.1007/s10589-010-9344-4

[17] M. Fukushima, Restricted generalized Nash equilibria and controlled penalty algorithm, *Computational Management Science* Vol.8 (2011), pp.201-218, 査読有. DOI:10.1007/s10287-009-0097-4

[18] K. Nabetani, P. Tseng and M. Fukushima, Parametrized variational inequality approaches to generalized Nash equilibrium problems with shared constraints, *Computational Optimization and Applications* Vol.48 (2011), pp.423-452, 査読有. DOI: 10.1007/s10589-009-9256-3

[19] T. Yan and M. Fukushima, Smoothing method for mathematical programs with symmetric cone complementarity constraints, *Optimization* Vol.60 (2011), pp. 113-128, 査読有. DOI:10.1080/02331934.2010.541458

[20] G.H. Lin and M. Fukushima, Stochastic equilibrium problems and stochastic mathematical programs with equilibrium constraints: A survey, *Pacific Journal of Optimization* Vol.6 (2010), pp.455-482,

査読有. URL: <http://www.ybook.co.jp/online2/pjov6-1.html>

〔学会発表〕(計 12 件)

[1] 福嶋雅夫, ナッシュ均衡問題とその拡張定式化と計算手法, 情報学シンポジウム, 京都大学, 京都市, 2013年12月26日.

[2] M. Fukushima, Equilibrium Problems with Equilibrium Constraints and Multi-Leader-Follower Games, The Ninth International Conference on Optimization: Techniques and Applications (ICOTA9), Taipei, Taiwan, December 14, 2013.

[3] M. Fukushima, Formulation and Computation of Robust Nash Equilibria in Multi-Leader-Follower Games, The Eighth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2013), Hiroasaki, Japan, August 3, 2013.

[4] M. Fukushima, Generalized Nash Equilibrium Problems, The IMPA - 60 Years Conference, Rio de Janeiro, Brazil, October 8, 2012.

[5] M. Fukushima, Robust Nash Equilibrium in a Class of Multi-Leader-Follower Games, The 25th European Conference on Operational Research (EURO XXV), Vilnius, Lithuania, June 9, 2012.

[6] M. Fukushima, Smoothing Approach to Equilibrium Problems with Shared Complementarity Constraints, The Third Conference on Optimization Methods and Software, Chania, Greece, May 17, 2012.

[7] M. Fukushima, Row Action Methods for Solving  $L_1$ - $L_2$  Optimization Problems, The Eighth International Conference on Numerical Optimization and Numerical Linear Algebra (ICNONLA 2011), Xiamen, China, November 8, 2011.

[8] M. Fukushima, SOR-type and Jacobi-type Iterative Methods for Solving  $L_1$ - $L_2$  Problems by Way of Fenchel Duality, The Third Alicante-Limoge-Elche Meeting on Optimization (III ALEL), Castro Urdiales, Spain, June 25, 2011.

[9] M. Fukushima, A Brief Overview of Stochastic Equilibrium Problems and Stochastic Mathematical Programs with Equilibrium Constraints, The Eighth International Conference on Optimization: Techniques and Applications (ICOTA8), Shanghai, China, December 12, 2010.

[10] M. Fukushima, Parametrized Variational Inequality Approaches to Generalized Nash Equilibrium Problems with Shared Constraints, The Second South Pacific Conference on Mathematics (SPCM 2010), Noumea, New Caledonia, September 2, 2010.

[11] M. Fukushima, Generalized Nash Games and Variational Inequalities, The Inter-

national Conference on Optimization, Simulation and Control (ICOSC 2010), Ulaanbaatar, Mongolia, July 25, 2010.

[12] M. Fukushima, Game Theory and Variational Inequalities - A Tutorial, International Conference on Optimization and Control (ICOCO 2010), Guiyang, China, July 19, 2010.

〔その他〕

ホームページ

<http://www.seto.nanzan-u.ac.jp/~fuku/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

福嶋 雅夫 (FUKUSHIMA Masao)

南山大学・情報理工学部・教授

研究者番号：30089114

### (2) 研究分担者

なし ( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

なし ( )

研究者番号：