様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年５月３１日現在

機関番号：１２７０１
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2010～2012
課題番号：２２５３０９５７
研究課題名（和文）スパイラルを重視した数学的活動による代数学習の深化を促す単元と学習方法の開発
研究課題名（英文）Developing Teaching Unit and Learning Method centered in Mathematical Activity on Spiral Curriculum about School Algebra
研究代表者
両角　達男（MOROZUMI TATSUO）
横浜国立大学・教育人間科学部・准教授
研究者番号：５０３２４３２２

研究成果の概要（和文）：本研究では，スパイラルを重視した数学的活動による学校代数の単元を開発するとともに，その単元における学習過程を質的に分析することから，代数学習の深化について考察した．開発した単元は，平方根，式と証明，数列，数列の極限，球の体積・表面積であり，学校代数の系統性と単元どうしのつながりをふまえている．これらの単元を通して，無理数に関する理解が深まるなど，代数学習の深化と学習方法の改善がみられた．

研究成果の概要（英文）：This research has developed teaching unit and leaning method centered in mathematical activity on spiral curriculum about school algebra. Teaching unit in this research forcus on square root,expression and proof, sequence, limit of sequence,the volume and surface area of square. Through these lessons about teaching unit, students make progress to form conception of irrational number, to make connection between unit such as number, expression and proof, sequence, and to reflect own learning about secondary school algebra.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	1,800,000	540,000	2,340,000
２０１１年度	900,000	270,000	1,170,000
２０１２年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数学教育学
科研費の分科・細目：教育学・教科教育学
キーワード：スパイラル，数学的活動，代数学習，単元，つながり，学習方法

１．研究開始当初の背景

数学的活動を行う目的は，数学的活動を通して生徒自らが数学に関する知識を再構成する点にある．渡邊公夫氏(2008)は，数学的活動による知識の再構成の過程を「脱皮を繰り返しながらの成長」という比喩を用いて，「スパイラルと数学的活動」について説明する．さらに，渡邊氏は数学的活動におけるふりかえることについて「抽象化に伴うメタ認知が，それまでの学習を俯瞰的にみることを可能とし，結果として既習事項をより確かな認識に至るのである．」と指摘する．

生徒が自らの数学の知識を再構成するためには，生徒がいま学んでいることがらの抽象化や一般化を行う過程でこれから学ぼうとすることがらの数学

的な洞察を行うことが必要である．同時に，生徒がこれまでに学んできたことがらや自身の学習経験をふりかえることから，学んできたことがらについて解釈し，新たな意味を形成することも必要である．そこで，生徒が自らの数学の知識を再構成する上で,「数学的な洞察と新たな意味形成の繰り返しによる数学的活動」が重要な役割を果たすと考え，これをスパイラルを重視した数学的活動ととらえた．

このスパイラルを重視した数学的活動を具体的に開発していくことが,「算数・数学の内容の系統性を重視しつつ学年間や学校段階間で内容の一部を重複させて，発達や学年の段階に応じた反復（スパイラル）による教育課程を編成できるようにする」(中央教育審議会答申，2008）や，中学校や高等学校数学科における「学び直しの機会の設定」や「数学的活動の一層の充実」に対して,具体的に応えるものと考えた．

２．研究の目的

本研究の目的は，中学校・高等学校の代数領域でのスパイラルを重視した数学的活動による単元と，代数学習の深化を促すための効果的な学習方法を開発することである．また，開発した単元について授業実践を行い，生徒の学習過程を質的に分析することから，スパイラルを重視した数学的活動による代数学習の深化の様相について考察することである．

３．研究の方法

上記の研究の目的に向けて，次の３つの方法により考察を進める．

(1) スパイラルを重視した数学的活動による単元「平方根」，単元「式と証明」，単元「数列」，単元「数列の極限」単元「球の体積・表面積」を開発する．また，開発した単元に関わる授業を中学校・高等学校で行い，その授業データを収集する．

(2) スパイラルを重視した数学的活動による単元の授業における，生徒の特徴的な学習活動や記述内容に着目し，その学習過程を質的に考察する．

なお，授業の流れの考察とともに，同一生徒の長期にわたる学習状況を，授業での特徴的な動きや記述の変遷に着目して分析を行う．

(3) 生徒の数学的思考を促す数式処理電卓などのテクノロジーの利用，学習したことがらの内省や家庭学習との往還を促す書く活動，数学的な事象を多様な数学的表現で表し，その解釈を行う活動など，代数学習の深化を促すための効果的な学習方法を取り入れる．

また，その学習効果について，単元での生徒の学習過程から考察する．

４．研究成果

本研究にて開発した単元は,平方根,式と証明，数列，数列の極限，球の体積と表面積であり，これらの授業における生徒の学習過程の分析により，代数学習の深化について考察を行っている．本稿では，２つの単元「式と証明」,「数列」に関して考察の概要を述べる．

(1)単元「式と証明」における式を読む活動と学んだことがらに新たな意味形成を行う活動について

単元「式と証明」の学習は，数学的活動の目的に関する３つの観点「理解を深める，関連性を深める，扱いを拡げる」と，代数的活動の特徴に関する３つの観点「生成の活動，変形の活動，内省の活動」をふまえて設けられた，３×３の数学的活動の分類枠組みに基づいて設計される．単元「式と証明」における授業の概要は，次のア～オの通りである．（2010年８月～９月）

ア　２つの式について，式の値を調べながら，恒等式についての理解を深める．

イ　式の形に着目して未定係数法が効果的に使える方法を考えたり，数値代入法を使う方法を工夫する．

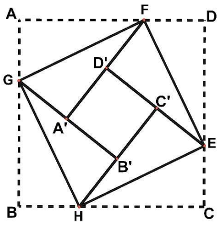
ウ　条件を満たす数値や数式で帰納的に調べたり，式を変形したりしながら，文字式で表された事象の数量や数量関係を見いだす。また，見いだした数量関係や構造をさらなる数理の探究に活かす．

エ　等式や不等式の意味を図形やグラフで解釈するとともに，等式や不等式を証明する．

オ　数の性質をふりかえり学び直したり，新たな数の性質を発見したりしながら，数の性質を既に学んだ等式や不等式を使って証明する．また，証明された数の性質をもとに，新たな性質を見いだす．

例えば，上記のエでは，正方形の折り紙を用いて，その四隅から重なりのないように次々と直角三角形を折り込み，内側に大小の正方形をつくるという活動を行う。この活動をふりかえり，

図形の面積どうしの関係を文字式で表す（右図でAG，GBをａ，ｂとする）と，様々な等式や不等式を生み出すことができる．



この活動において，七海（仮称）は，図１のように，正方形の面積を多様に文字式で表現することを試みる．

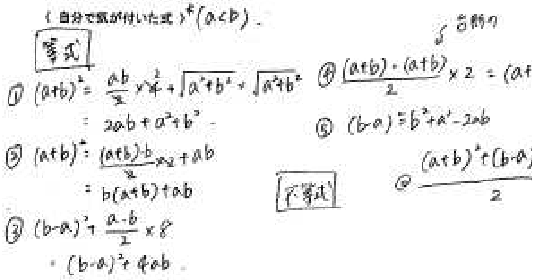


図１：七海による等式の導出と解釈

例えば，七海の考えた次の等式は，もとの正方形ABCDを内側にできた正方形と四隅の直角三角形の和としてとらえていることを意味している．

$$(a+b)^2=\frac{ab}{2}\times 4+\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{a^2+b^2}$$

七海は図１のように，折り紙を折り込んでつくった図をふりかえり，いくつかの等式や不等式をつくっている．ここでは，折り紙を折る行為，折り紙を折ってできた図を対象に，様々な式を生成している．

佐織（仮称）は，同じ活動で図２のように，５つの等式をかく。

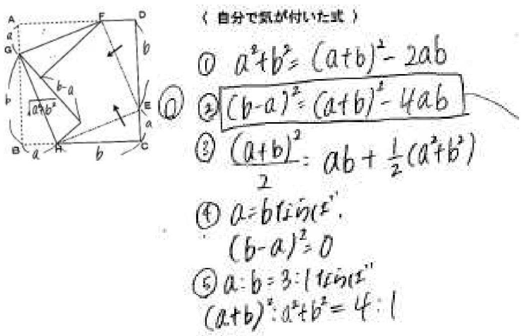


図２：佐織による等式の導出

佐織は$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$の等式を図から導くとともに，この式を変形して，次の等式を得る．

$$\frac{(a+b)^2}{2}=ab+\frac{1}{2}(a^2+b^2) \qquad (③)$$

続いて，この③式の意味を図で解釈していく．正方形に対角線をひいて考えたり，折った折り紙を開いたり，再び折り込みその意味を考えている．

七海は図や文脈（折り紙を折り込む行為等）と式を関連づけながら，式を次々と生成する活動を行い，佐織は式から同値変形により新たな式を導出しその意味を図や文脈で解釈している．

その後，佐織は自分が導出した式$(b-a)^2=(a+b)^2-4ab$から，不等式$4ab\leqq(a+b)^2$がつくられることに強い興味をもつとともに，図や折り紙を折る操作と対比させながら，次の式の意味を確認する．

$$(a-b)^2\leqq a^2+b^2\leqq(a+b)^2$$

このように，式の意味を図（文脈）で解釈し，式の形を強く意識して式をとらえる活動がみられた．また，次の図３(七海)のように，式の形に着目していくつかの等式を束ねてみたり，式の形の類似性に着目して等式と不等式を関連づけることが行われている．

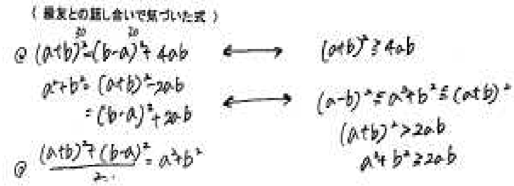


図３：式の形に着目して式を関連づける

オの学習活動では，２つの「平方数の和」は，１つの「平方数の和」になることを見いだす活動が行われた．例えば，$(1^2+2^2)\times(2^2+3^2)$と同じ$○^2+□^2$となる自然数○と□を導くことであり，２つの「平方数の和」に関する性質を探究する活動である．その性質とは，次の等式で表される関係である．また，数学的には「平方数の和」は，「平方数の和」どうしの乗法に関して半群（可換半群）の構造を有していることになる．

$$(a^2+b^2)\times(c^2+d^2)$$
$$=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

「平方数の和」に関して，帰納的に探していく活動をふりかえり，その行為を数式や文字式に関連づけることにより，生徒の学習に式の形や構造への着目が生じていた．一方，「平方数の和」について，生徒が着目した特殊な例のもつ属性に固執してしまうために，式で考える手がかりをつかめない場合もみられた．

また，オの学習活動では，３つの数

$$\frac{a}{2}+\frac{1}{a},\ \frac{a+2}{a+1},\ \sqrt{2}\ \ (a>\sqrt{2})$$

の大小関係を探究する活動も行われる．

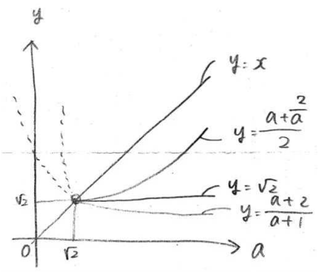
相加・相乗平均の大小関係を用いると，次の関係を得ることができる．

$\frac{a}{2}+\frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{a}}$ であるから $\frac{a}{2}+\frac{1}{a}$ の値は，$a \geqq \sqrt{2}$ のときに $\sqrt{2}$ 以上となる．

また，$\frac{a}{2}+\frac{1}{a}=\frac{a+\frac{2}{a}}{2}$ のように式変形をすると，式 $\frac{a}{2}+\frac{1}{a}$ は「面積２の長方形の縦と横の長さの平均をとり，それを次の長方形の長さにする」という方法で，面積２と等積の長方形を得ることに関連づけることができる．
これは，単元「平方根」にて，面積２の長方形を等積変形しながら，面積２の正方形に近づき，面積２の正方形の一辺の長さとして $\sqrt{2}$ を得る方法の１つである．

生徒は，単元「平方根」や単元「式と証明」で学んだことがらと関連づけながら，不等式 $\frac{a+2}{a+1}<\sqrt{2}<\frac{a}{2}+\frac{1}{a}$ の関係を導く．

その過程において，生徒たちは単元「平方根」で行った，長方形の縦横の長さの平均を次々に数式処理電卓で計算し，それを次の長方形の縦にする方法と，この不等式の関係が密接に関わることに驚きを抱いている．また，数式処理電卓を使って関数のグラフをかき，この不等式の関係を視覚化してとらえようとする生徒の動きもみられた．



(2)　単元「数列」におけるスパイラルを重視した数学的活動と代数学習の深化について

単元「数列」は，次のア～エの４つの学習で構成され，2011年11月に授業実践された．

ア　数列から規則性を発見し，その規則性を多様な数学的な表現で表し解釈することから，等差数列や等比数列，及びその和の求め方を理解する．

イ　$\sqrt{2}$ に限りなく接近する有理数列の特徴を調べる活動を通して数 $\sqrt{2}$ に関する理解を深めるとともに，$\sqrt{2}$ のもつ無限や極限についての数学的な洞察を行う．

ウ．尋常小学算術教科書（緑表紙）の表紙にある図を，折り紙を用いて実際につくり，その活動をふりかえることから無限級数とその和に関する直観的な見方を高める．

エ．確率漸化式を用いて解決する問題の考察を通して，漸化式の有用性を実感する．

単元「数列」におけるスパイラルを重視した数学的活動として，$\sqrt{2}$ に限りなく接近する有理数列について考える活動がある．（イの学習活動）

この $\sqrt{2}$ に限りなく接近する有理数列とは，次の数列 $\{c_n\}$ である．

$\{c_n\}$ ：$\frac{1}{1}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{7}{5}$，$\frac{17}{12}$，$\frac{41}{29}$，$\frac{99}{70}$，……

与えられた数列 $\{c_n\}$ の項から，新たに項をつくり出すことを通して，「１つ前の項の分母と分子の和が，次の項の分母になること」や「ある項とその１つ前の分母どうしの和が，ある項の分子になること」等，この数列の規則性を発見することができる．また，この数列の各項を小数で表示すると｛1，1.5，1.4，1.41666…，1.41379…，1.4142…，……｝を得る．このことから数列 $\{c_n\}$ は，徐々に1.4142･･･に近づくことが直観的にわかる．

一方，数列 $\{c_n\}$ を隣接二項間の関係に着目して漸化式，および一般項の式で表すと，次のようになる．

漸化式：$C_1=1, C_{n+1}=\frac{C_n+2}{C_n+1}$ ･･･①

一般項を表す式：

$$C_n=\frac{\sqrt{2}\{(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n\}}{(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n} \quad \cdots②$$

②式でｎを十分に大きくしていくとこの数列は $\sqrt{2}$ に限りなく接近することがわかる．

また，①式を関数としてとらえると，２つの関数 $y=\frac{x+2}{x+1}, y=x, (x>0)$ を用いることにより，図４のように，徐々に $\sqrt{2}$ に接近する様子を表現したり，解釈したりすることができる．

単元「数列」の授業では，図４をリターンマップと呼んでいた．
なお，関数のグラフは数式処理電卓を用いて，画面上にかき，その概形をプリントに鉛筆でかくことを行っている．

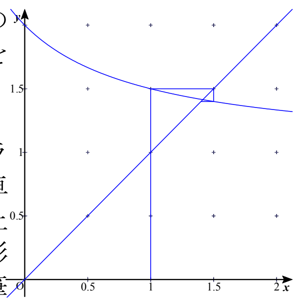


図４

単元「数列」イの学習における七海の特徴的な動きに焦点をあて，七海の学習過程からみた代数学習の理解の深化について，ここでは検討する．七海は，$\sqrt{2}$ に限りなく接近する有理数列について，七海は分子からなる数列 $\{a_n\}$ と分母からなる数列 $\{b_n\}$ に着目し，それぞれの階差を計算した後に，数列 $\{b_n\}$ の階差数列が数列 $\{a_n\}$ に一致することを見いだす．また，これらの数列の第二階差数列などにも同様の関係があることに気づき，数列 $\{c_n\}$ の分子と分母との関係に強い関心を抱く．その関心の高まりは，有理数列のもつ次の関係式を導出したり，他者とこの関係を議論したりすることを促す．

・$a_{n+1} = b_n + b_{n+1}$ ，$b_{n+1} = a_n + b_n$

・$a_{n+2} = a_n + 2a_{n+1}$ ，$b_{n+2} = b_n + 2b_{n+1}$

その後，数列 $\{c_n\}$ の各項を小数表示して大小関係を調べたり，数列の項がつくられるアルゴリズムに興味をもち，式でその様子を表現したりする動きが出てくる．そうした中で「区間［0,2］の数直線上に c_1〜c_{10} を正確にプロットし，気づいたことを列挙しよう．」という発問が教師からなされる．

この発問に対して，七海は図５をかきながら，数列 $\{c_n\}$ の各項の大小関係が $c_1 < c_3 < c_5 < \cdots < c_6 < c_4 < c_2$ となることに気づく．同時に，この数列が $\sqrt{2}$ に近づくのだろうかという「問い」を記す．

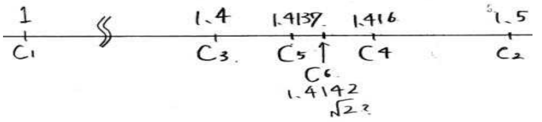


図５：数直線上での各項の図示

七海は，数列 $\{c_n\}$ の隣り合う二項間の差や，ある項がその前の項の何倍で導かれるかを数式処理電卓で順次計算をしていく．この活動を通して数列 $\{c_n\}$ は $\sqrt{2}$ に限りなく接近していくのではないかと予想する．

授業の中でも，この数列が $\sqrt{2}$ に接近しそうであることが確認される．その一方で，本当にこの数列が $\sqrt{2}$ に近づくのかという「問い」や，数列の各項の値の変化を何によるものなのかという「問い」が次々と生徒から出される．教師は，生徒が発見した性質や探究を通して生まれた「問い」を板書にて整理しながら，数列を漸化式で表現することを促した．数列 $\{c_n\}$ を漸化式で表すことに関して，七海は数列の項を1つ前の項で表現することから，その関係式を導こうとする．例えば，数列の第３項7/5を，第２項3/2との関わりで表現し，$C_3 = \dfrac{2+C_2}{1+C_2}$ を得ている．さらに，この関係式から $C_4 = \dfrac{2+C_3}{1+C_3}$ を類推し，実際にこの関係式で表現できることを確認した後に，一般の場合を想定する．

続いて，授業では漸化式を関数の式とみて，有理数列 $\{c_n\}$ が $\sqrt{2}$ に限りなく近づくことをグラフ（リターンマップ）で解釈することが行われる．七海は，この活動において，図６をかく。

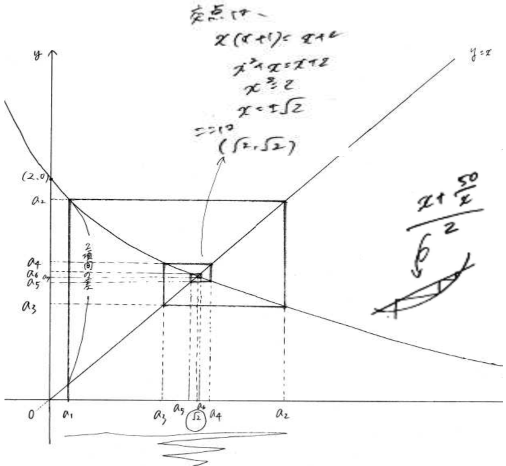


図６：グラフで有理数列を解釈する

七海は，数式処理電卓の画面上に表現されたグラフをプリントにかくとともに，そのプリントにｘ＝１から２つの関数のグラフの交点（$\sqrt{2}$ ，$\sqrt{2}$）に接近していく様子をリターンマップとしてかいている．その後，有理数列 $\{c_n\}$ の奇数番目と偶数番目の項が，交互に大小関係を変えて $\sqrt{2}$ に接近する様子をｘ軸の下にかきこんだり，漸化式の特性方程式の解釈や，単元「平方根」で学んだことを関連づけて記している．

有理数列 $\{c_n\}$ について，数式処理電卓での操作，アルゴリズムの言語化，式や関数のグラフでの表現とその解釈等を互いに関連づけて考えている．このことにより，有理数から無理数に接近することや，無限を意識して無理数をとらえる等，無理数の意味が実在的なものから徐々に概念的なものに移行している．

本研究における今後の課題は，スパイラルを重視した数学的活動による単元をさらに開発し，その学習効果と生徒の代数学習の深化についてさらに考察を進めることである．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）
〔雑誌論文〕（計９件）
①両角達男，荻原文弘「無理数や自然数に限りなく接近する数列とその特徴の探究による学習の深化」,日本数学教育学会第45回数学教育論文発表会論文集，pp.527-532，2012，査読有
②荻原文弘，両角達男「スパイラルによる円の面積や球の体積公式を導出し解釈する学習過程」,日本数学教育学会第45回数学教育論文発表会論文集，pp.587-592，2012，査読有
③両角達男「図形の学習導入期にみられる言語活動の充実」,日本数学教育学会誌数学教育，第94巻第７号，pp.27-30，2012，査読有
④両角達男，荻原文弘「単元どうしのつながりを重視した代数学習と学習の深化」,日本数学教育学会第44回数学教育論文発表会論文集，pp.435-440，2011，査読有
⑤荻原文弘，両角達男「スパイラルを重視した単元「数列」における無理数に対する理解の深まり」,日本数学教育学会第44回数学教育論文発表会論文集，pp.429-434，2011，査読有
⑥両角達男「スパイラルによる中高連携を重視した数学的活動」,日本数学教育学会誌数学教育，第93巻，第11号，pp.31-34，2011，査読有
⑦両角達男，荻原文弘「単元「式と証明」における式を読むことを重視した活動と学習の深化」,日本数学教育学会第43回数学教育論文発表会論文集，pp.573-578，2010，査読有
⑧荻原文弘，両角達男「単元「式と証明」におけるふりかえり新たな意味形成をする数学的活動」,日本数学教育学会第43回数学教育論文発表会論文集，pp.151-156，2010，査読有
⑨両角達男「探究的活動としての証明の学習指導の充実に向けて　－学習のリズム感と証明の必要感を重視した単元をつくる－」,日本数学教育学会第43回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表収録，pp.45-50，2010，査読無
〔学会発表〕（計１０件）
①両角達男，荻原文弘「無理数や自然数に限りなく接近する数列とその特徴の探究による学習の深化」,日本数学教育学会第45回数学教育論文発表会，2012.11.11，奈良教育大学
②荻原文弘，両角達男「スパイラルによる円の面積や球の体積公式を導出し解釈する学習過程」,日本数学教育学会第45回数学教育論文発表会，2012.11.11，奈良教育大学
③両角達男，荻原文弘「単元どうしのつながりを重視した代数学習と学習の深化」,日本数学教育学会第44回数学教育論文発表会，2011.11.13，上越教育大学
④荻原文弘，両角達男「スパイラルを重視した単元「数列」における無理数に対する理解の深まり」,日本数学教育学会第44回数学教育論文発表会2011.11.13，上越教育大学
⑤両角達男，荻原文弘「平方根の和に関する探究過程における学習者の例で考える動き」,日本科学教育学会第35回年会，2011.8.23，東京工業大学
⑥荻原文弘，両角達男「不等式を読むことから広がる数学的活動における学習者の動きと理解の変容」,日本科学教育学会第35回年会，2011.8.23，東京工業大学
⑦両角達男，荻原文弘「単元「式と証明」における式を読むことを重視した活動と学習の深化」,日本数学教育学会第43回数学教育論文発表会，2010.11.14，宮崎大学
⑧荻原文弘，両角達男「単元「式と証明」におけるふりかえり新たな意味形成をする数学的活動」,日本数学教育学会第43回数学教育論文発表会，2010.11.13，宮崎大学
⑨両角達男「探究的活動としての証明の学習指導の充実に向けて」,日本数学教育学会第43回数学教育論文発表会「課題別分科会」，2010.11.13，宮崎大学
⑩両角達男，荻原文弘「有理数から平方根に接近する数学的活動における学習者の動き」,日本科学教育学会第34回年会，2010.9.11，広島大学
６．研究組織
(1)研究代表者
両角　達男（MOROZUMI　TATSUO）
横浜国立大学・教育人間科学部・准教授
研究者番号：５０３２４３２２
(2)研究協力者
荻原　文弘(OGIHARA　FUMIHIRO)
佐久長聖中学・高等学校・教諭