

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 16 日現在

機関番号：10101
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2013
課題番号：22540001
研究課題名(和文) ダイナミカル・ヤン・バクスター写像とホップ垂代数

研究課題名(英文) Dynamical Yang-Baxter maps and Hopf algebroids

研究代表者

澁川 陽一 (Shibukawa, Youichi)

北海道大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：90241299

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円、(間接経費) 810,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の主要な結果は、ある種の量子ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式の解であるダイナミカル・ヤン・バクスター写像を用いてホップ垂代数や面代数などの代数を構成したことである。ここで構成したホップ垂代数を利用して、リジッドなテンソル圏(「双対」の定義されたテンソル圏のこと)を作り出すことにも成功した。その他、ダイナミカル・ヤン・バクスター写像を作成する新たな方法も確立した。

研究成果の概要(英文)：The main result of this research is to construct algebras, such as Hopf algebroids and face algebras, from dynamical Yang-Baxter maps, solutions to a version of the quantum dynamical Yang-Baxter equation. By making use of these Hopf algebroids, we provided with rigid tensor categories, which are tensor categories with "duals". In addition, we established a method to produce the dynamical Yang-Baxter map.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：ダイナミカル・ヤン・バクスター写像 ホップ垂代数 リジッドなテンソル圏

1. 研究開始当初の背景

(1) ダイナミカル・ヤン・バクスター写像は、研究代表者により導入された、ある種の量子ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式の集合論的解である (Int. Math. Res. Not. 2005, 36, 2199-2221). これは、ドリinfeldtによって研究が提唱されたヤン・バクスター写像の一般化でもある。研究代表者らによって、例えば、ある性質を満たす3項演算と左擬群の組を用いてダイナミカル・ヤン・バクスター写像を構成できることが示されていた (Publ. RIMS, Kyoto Univ. 43(2007), 1157-1182).

(2) ファデーエフ-レシェティヒン-タハタジャンによる、いわゆる FRT 構成法により、量子ヤン・バクスター方程式の行列解である R 行列を用いて関数環の q 類似が定義される。関数環の q 類似の有限次元表現全体のなすテンソル圏はリジッドとなるが、これは関数環の q 類似がホップ代数であることの帰結である。

(3) (2) と同様の方法で、適切な性質を持つダイナミカル・ヤン・バクスター写像から左双垂代数が構成される (J. Algebra 323(2010), 1698-1728). さらに、そのダイナミカル表現全体はテンソル圏となる。

(4) したがって、次に解決すべき問題は、(3) の左双垂代数の各ダイナミカル表現に対し「双対」を適切に定義することにより、有限次元ダイナミカル表現全体のなすテンソル圏がリジッドとなるかどうか確かめた上で、このようなダイナミカル・ヤン・バクスター写像を具体的に構成することである。

(5) 関数環の q 類似の場合、(2) で説明したように、これがホップ代数であることから、有限次元表現全体のなすテンソル圏がリジッドとなる。また、エチンゴフ-バルチェンコによる楕円量子群の場合、これがホップ代数の一般化であるホップ垂代数となっていることから有限次元のダイナミカル表現全体がリジッドなテンソル圏となる。これらを参考にして、ダイナミカル・ヤン・バクスター写像に付随して定義される左双垂代数がホップ垂代数であれば、その有限次元ダイナミカル表現全体のなすテンソル圏がリジッドとなるのではないかとこの着想に至った。

(6) (1) で提示したように、研究代表者により多くのダイナミカル・ヤン・バクスター写像が構成されているので、この中からホップ垂代数となるようなダイナミカル・ヤン・バクスター写像を見つけ出すことができるのではないかと発想した。

2. 研究の目的

(1) ダイナミカル・ヤン・バクスター写像に付随する左双垂代数がホップ垂代数となるための条件を求める。

(2) 上記条件を満たすダイナミカル・ヤン・バクスター写像を構成する。

(3) (1) の条件、および、(2) の構成を圏

論的に一般化する。

3. 研究の方法

(1) 「双対」を取扱うため、研究代表者らによる結果 (J. Algebra 323(2010), 1698-1728) を、ベクトル空間の言葉を用いて書き直す。「1. 研究開始当初の背景 (1)」で説明した通り、ダイナミカル・ヤン・バクスター写像は、ある種の量子ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式の集合論的解であるので、これに合わせて、ダイナミカル表現なども集合より正確には基底を用いて定式化していた。しかし基底を用いていたため、このままでは「双対」を構成することが困難であった。これを克服するため、ベクトル空間を用いて再定式化し、この立場から研究代表者らによる結果を再証明する。

(2) エチンゴフ-バルチェンコの論文 (Commun. Math. Phys. 196(1998), 591-640) で用いられた、楕円量子群に対する以下のアイデアを利用する。

ダイナミカル・ヤン・バクスター写像に付随して定義される左双垂代数がホップ垂代数となるための条件を、左双垂代数にある性質を持つ元が存在することとして、書き下す。

上記条件と、左双垂代数が対合射を持つための条件の関係を明らかにする。

(3) 上記 (2) の条件を満たすためのダイナミカル・ヤン・バクスター写像の条件を求める。特に、この条件を、いくつかの行列が逆行列を持つこととして表す。

(4) 「1. 研究開始当初の背景 (1)」で紹介したダイナミカル・ヤン・バクスター写像の中から、上記 (3) の条件を満たすものを探す。

(5) 左双垂代数がホップ垂代数となるとき、そのダイナミカル表現に対し、左双対・右双対を定義する。この左双垂代数は、あるテンソル代数 A を A の両側イデアル I で割って A/I と定義される。この特性を利用して、まずテンソル代数 A 上で左双対・右双対を生み出す写像を定義し、それが両側イデアル I 上 0 となることを証明する。これにより、ホップ垂代数 A/I 上に左双対・右双対が定義できることを示す。

4. 研究成果

(1) 研究代表者らが論文 (J. Algebra 323(2010), 1698-1728) で導入した新しいテンソル圏を、対象がベクトル空間となるように再定式化した。このテンソル圏でのブレイド関係式が、量子ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式を一般化したものになっていることから、量子ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式を研究する際の基本的道具となることが期待される。この再定式化に合わせて、ブレイド関係式を満たす射に付随して定まる左双垂代数や、それに関連したダイナミカル表現全体のなすテンソル圏なども、ベクトル空間を用いて再構成した。さらに、この定式化のもとで、研究代表者らの得た結果を

再証明した。この結果，ダイナミカル表現の「双対」を定義することが可能となった。

(2) 上記左双亜代数がホップ亜代数となるための条件を書き下した。この条件は，この左双亜代数の生成元を成分として持つ行列が逆行列を持つこととして表現される。ただし，ここでこの行列の積は，左双亜代数の各元の積が通常の積と反対になるように定義しておく(すなわち， $a*b=ba$ で積を定義して得られる代数の元を成分に持つ行列の積を考えると)。

(3) 上記(2)の条件が，左双亜代数上に射影が定義されることと必要十分であることを示した。結果として，この左双亜代数がホップ亜代数となることも証明した。これは，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像に付随して定まるホップ亜代数が，量子ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式の行列解であるダイナミカルR行列に付随して得られる楕円量子群と同様の構造を持っていることを示唆している。

(4) 上記条件(2)を満たすダイナミカル・ヤン・バクスター写像の十分条件を考察した。より具体的には，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像から定義される関数を成分として持つ5つの行列が逆行列を持つならば，上記(2)の条件を満たすことを証明した。証明の方針は，左双亜代数内で成立するいくつかの関係式から，(2)における逆行列を構成するというもので，本研究の参考にしたエチンゴフ・バルチェンコのアイディアを用いている。

(5) 上記十分条件を満たすダイナミカル・ヤン・バクスター写像を数多く生み出す方法を提示した。この部分は，研究代表者による結果(Publ. RIMS, Kyoto Univ. 43(2007), 1157-1182)を用いたもので，擬群および可換群などを利用して構成する。この十分条件を満たす例として，例えば， $QG=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ としよう。ここに以下の表で2項演算を定義するとQGは擬群となる。ここで， $0^2=2$ である。

	0	1	2	3	4
0	4	3	2	1	0
1	3	1	0	2	4
2	0	2	3	4	1
3	1	0	4	3	2
4	2	4	1	0	3

表1. QGの2項演算

この擬群と適切な3項演算から(4)の十分条件を満たすダイナミカル・ヤン・バクスター写像が構成され，結果としてこれから定まる左双亜代数がホップ亜代数となる。このようにして，ホップ亜代数を比較的簡単に構成する方法を与えた。この成果は数多くのホップ亜代数の例を提供しており，ホップ亜代数

の研究を推進する上で重要であると考えている。

(6) 本研究で構成したホップ亜代数の各ダイナミカル表現に対し，左双対・右双対が定義できるための条件を求めた。楕円量子群と異なり，このホップ亜代数は，ある両側グレーディングに関し，必ずしも直和となっていない。このことが災いし，エチンゴフ・バルチェンコのアイディアを適用することが困難となり，各ダイナミカル表現に対する左双対・右双対を定義することが直ちには出来なくなる。これに対しては，研究代表者らによる結果を用いて克服した。具体的には，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像にある条件を課すと，各ダイナミカル表現に対する左双対・右双対の定義ができることを証明した。さらに，この条件下で，有限次元ダイナミカル表現全体のなすテンソル圏がリジッドであることを証明した。

(7) 上記(6)の条件をすべて満たすダイナミカル・ヤン・バクスター写像を構成した。実は，(5)の方法で構成したダイナミカル・ヤン・バクスター写像は，(6)で新たに課した条件をすべて満たしてしまうので，(5)のダイナミカル・ヤン・バクスター写像に付随したホップ亜代数の有限次元ダイナミカル表現全体は，リジッドなテンソル圏となることがわかる。

(8) 本報告書作成時点で，(1)~(7)の結果を論文にまとめているところである。

(9) ダイナミカル・ヤン・バクスター写像から，余擬三角な面代数を構成した。(1)~(7)で示した研究成果を考慮に入れると，同じダイナミカル・ヤン・バクスター写像から定義される面代数とホップ亜代数の関係を明らかにするという研究課題が現れる。今後直ちに解決すべき課題の1つと考えている。

(10) 研究代表者らは，任意のテンソル圏上で，ブレイデッド半群を用いることにより，ブレイド関係式を満たす射が構成できることを証明した。これを(1)のテンソル圏に応用すれば，直ちに，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像が構成できることになる。得られた成果は既に学会で報告している。さらに論文にまとめ，本報告書作成時点で投稿中である。

(11) 以上により「2.研究の目的(1)(2)」は概ね達成されたと考えている。(3)は今後の課題である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 0 件)

〔学会発表〕(計 1 件)

D.K.Matsumoto, 澁川陽一, Idempotent dynamical braiding maps and dynamical semigroups with left unit, 日本数学会 2013

年度年会無限可積分系特別セッション，2013
年3月23日，京都大学

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

澁川 陽一 (SHIBUKAWA, Youichi)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号：90241299