

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 13 日現在

機関番号：11101

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540005

研究課題名(和文) 連分数の解析的・代数的・組み合わせ論的研究

研究課題名(英文) Analytic, Algebraic and Combinatorial studies on continued fractions

研究代表者

小松 尚夫 (Komatsu, Takao)

弘前大学・理工学研究科・教授

研究者番号：70300556

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円、(間接経費) 930,000円

研究成果の概要(和文)：連分数の解析的研究としては、様々なHurwitz連分数とTasoev連分数の近似尺度についての正確な表現、フィボナッチゼータ関数と連分数との関連、ゼータ関数とコーシー多項式の関連が得られた。代数的研究としては代数的独立性測度、非アルキメデス附値におけるリュウビル数の構成ができた。組み合わせ論的研究としては、有限体上のある位数をもつ円分数の上限を与えること、多項パスカル三角形における関係式の発見ができた。また、総合的研究として、連分数、フィボナッチ数、合同数の関係を示し、ベルヌーイ数と関連するコーシー数を一般化した多重コーシー数や多項式の発見につながった。

研究成果の概要(英文)：Analytic studies of continued fractions are to obtain exact algebraic expressions for approximation evaluations of various Hurwitz and Tasoev continued fractions, some relations between Fibonacci-zeta functions and continued fractions, and some relations between zeta functions and Cauchy polynomials. Algebraic studies of continued fractions are to obtain independence measures of arithmetic functions and to construct Liouville numbers in non-Archimedean case. Combinatorial studies of continued fractions are to give upper bounds on cyclotomic numbers, and to discover linear recurrence relations associated with multinomial Pascal triangles. In addition, cross-studies of continued fractions are to show some relations among continued fractions, Fibonacci numbers and congruent numbers, and to discover the concept of poly Cauchy numbers and polynomials as some generalizations of Cauchy numbers, which are related with Bernoulli numbers.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：数論 代数学 組み合わせ論 連分数

1. 研究開始当初の背景

(1) 連分数とはある種の典型的なアルゴリズムにより実数を表現したものであり、解析、確率論、力学系、物理学などにおいて利用される道具の一つであるが、無理数の有理数による近似や不定方程式の解など数論において特に重要な役割を果たしている。

(2) 平成15年度から17年度までの科学研究費補助金・課題研究(C)(一般)の課題研究で、Tasoev 連分数という全く新しいタイプの連分数を定義し、その性質を調べ、既知の Hurwitz 連分数と比較研究してきた。

(3) 平成18年度から21年度までの科学研究費補助金・課題研究(C)(一般)の課題研究で、Hurwitz 連分数と超幾何関数との関連が解明され、よりいっそう新しい Tasoev 連分数の発見にもつながり、双曲線関数や積分関数との関係もわかるなど解析的研究が進んだ。

(4) さらに、連分数のアルゴリズムの研究から、その中核をなす漸化関係式の拡張構想に至り、leaping convergents という飛び飛びの連分数の研究など、組み合わせ的研究にもつながってきていた。

2. 研究の目的

(1) 単方向で単発的傾向があった連分数研究を多角的に進め、解析的、代数的、組合せ論的などの多方面から横断的に連分数研究を進めるのが、本研究の狙いである。今までの研究が個人的であったのに対し、連分数の専門外の研究者による協力も積極的に仰ぎ、必要性や研究の進展に応じて共同でも研究を進めて行く。

(2) 連分数を道具として扱う研究は多いが、本研究の中心軸は連分数そのものであり、それも分子が1となるような正規(正則、単純)連分数を扱うことを目的とする。非正規の場合を排除するものではないが、表現の一意性が保たれない等のデメリットがあるので、注意が必要である。

(3) 本研究の核となる連分数の専門家は海外に存在する。McLaughlin 氏(米・West Chester 大)、Bowman 氏(米・北イリノイ大)、Flahive 氏(米・オレゴン州立大)、Elsner 氏(ドイツ・Hanover)などであり、交流実績もある。

(4) 具体的には、解析的研究では関数や近似理論を扱い、代数的研究では代数体への拡張や単数・類数を扱う。また、組み合わせ論的研究では関係式や数列のパターン解析などを扱うことを目的とする。

3. 研究の方法

(1) 解析的方法では、連分数と特殊関数との関連、ディオファントス近似への応用などを考える。特に、擬似循環連分数と超幾何関数、双曲線関数、 q 関数、ゼータ関数、積文館数などとの関連を解明していき、応用・発展を模索していく。

(2) 代数的方法では、連分数の代数体への拡張、二次無理数(循環連分数を生じる)と類数との関連についての擬似循環連分数への応用などを考える。Hurwitz 連分数や Tasoev 連分数を代数体上に構成する問題に取り組む。

(3) 組み合わせ的方法では、leaping convergents に関する関係式の拡張、性質、応用などを考える。これにより、連分数の近似分数を元にして考えてきた関係式を、色々な多項式の関係式に拡張し、グラフ理論、組み合わせ解析、群論などの関連する諸分野での解釈を模索していく。

(4) 最終的には、3方向で行っている研究を統合・横断する。このために、連分数の専門家だけでなく、関連する諸分野の研究者にも協力を求め、個人研究だけでなく積極的に共同研究も推進する。これにより、連分数を核とした関連分野への波及効果も期待される。

4. 研究成果

(1) 連分数の解析的研究では、様々な型の Tasoev 連分数の近似値について正確な表現を与えることができ、ディオファントス方程式の解がみたす有理数との評価が得られた。Tasoev 連分数の3種類の型やその変形や拡張における指標を正確に表すことができ、それによって近似の精度を高められた。さらに発展的研究として、連分数と幾何級数の関連研究から幾何級数的コーシー数及び多項式が定義され、その性質が調べられた。

(2) 連分数の代数的研究では、より広い算術関数の代数的独立測度が得られた。それ以前までは、素数に依存する点における関数値のベクトル集合が線形独立であるような相異なる素数の集合が存在するという仮定が必要だったが、これが相異なる正整数の集合に拡張できた。また、代数体上や非アルキメデス附値における連分数の研究も進展し、連分数とカントール集合との研究にも結びついてきた。

(3) 連分数の組み合わせ論的研究では、パスカルの三角形に生じる線形関係式を一般の多項係数の三角形に生じる線形関係式に拡張した。また、有限体上のある位数をもつ円分数の上限を与えることができた。

(4) 横断的な研究としては、フィボナッチゼータ関数と連分数の研究の発展から、ゼータ関数と関連のある多重コーシー多項式を鎌野氏(大阪工業大)らと定義し、その性質を調べた。

(5) 京都大学数理解析研究所の研究集会に2010年10月、2011年10月、2012年10月、2013年10月と、毎年海外から研究者を招へいし、研究発表と共同研究を行い、その成果を論文として出版あるいは投稿してきている。2010年には Chaichana 氏(タイ・チュロンコン大)と代数体上のリュウヴィル数という連分数の代数的研究を、2011年には

Ruengsinub 氏 (タイ・カセットサート大) と算術関数の独立測度に関する連分数の代数的研究を、2012 年には Liptai 氏 (ハンガリー・エステルハーズィカーロイ大学長) と多重コーシー多項式に関する連分数の解析的かつ組み合わせ論的研究を、2013 年には Laohakosol 氏 (タイ・カセットサート大) と連分数とコントロール集合との関連の代数的研究をそれぞれ行った。

(6) 研究成果の一環として、国際研究集会「Diophantine Analysis and related fields」を世話人の一人として開催してきた。2011 年 3 月には成蹊大学、2012 年 1 月には新潟大学、2013 年 1 月には日本大学、2014 年 3 月には筑波大学と毎年開催し、国内外から 10~20 数件の講演を行ってきた。2012 年には弘前大学学生、2013 年には鎌野氏 (大阪工業大)、2014 年には Simsek 氏 (トルコ・アクデニズ大) の講演を実現させ、それぞれ共同研究も行い、研究成果を論文として出版あるいは投稿してきている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 31 件)

Takao Komatsu, V. Laohakosol and K. Liptai, A generalization of poly-Cauchy numbers and their properties, *Abstract Appl. Anal.* **2013** (2013), Article ID 179841, 8 pages. 査読有

Takao Komatsu and K. Kamano, Poly-Cauchy polynomials, *Mosc. J. Comb. Number Theory* **3** (2013), 181--207. 査読有

T. Chaichana, Takao Komatsu and V. Laohakosol, On convergents of certain values of hyperbolic functions formed from Diophantine equations, *Tokyo J. Math.* **36** (2013), 239--251. 査読有

J. J. Bravo, Takao Komatsu and F. Luca, On the distance between products of consecutive Fibonacci numbers and powers of Fibonacci numbers, *Indag. Math.* **24** (2013), 181--198. 査読有

Takao Komatsu, Hypergeometric Cauchy numbers, *Int. J. Number Theory* **9**

(2013), 545--560. 査読有

Takao Komatsu, Poly-Cauchy numbers with a q parameter, *Ramanujan J.* **31** (2013), 353--371. 査読有

K. Betsumiya, M. Hirasaka, Takao Komatsu and A. Munemasa, Upper bounds on cyclotomic numbers, *Linear Algebra Appl.* **438** (2013), 111--120. 査読有

Takao Komatsu, Poly-Cauchy numbers, *Kyushu. J. Math.* **67** (2013), 143--153. 査読有

Takao Komatsu, Some exact algebraic expressions for the tails of Tasoiev continued fractions, *J. Austral. Math. Soc.* **92** (2012), 179--193. 査読有

Takao Komatsu, V. Laohakosol and P. Ruengsinub, Independence measures of arithmetic functions II, *Acta Arith.* **153** (2012), 199 -- 216. 査読有

S. H. Holliday and Takao Komatsu, On the sum of reciprocal generalized Fibonacci numbers, *INTEGERS* **11** (2011), 441 -- 455. 査読有

Takao Komatsu, V. Laohakosol and P. Ruengsinub, Independence measures of arithmetic functions, *J. Number Theory* **131** (2011), 1 -- 17. 査読有

C. K. Caldwell and Takao Komatsu, Powers of Sierpinski numbers base b , *INTEGERS* **10** (2010), 423 -- 436. 査読有

T. Chaichana, Takao Komatsu and V. Laohakosol, Liouville numbers in non-Archimedean situation, *Publ. Math. Debrecen* **77** (2010) 39--63. 査読有

[学会発表](計 29 件)

. Takao Komatsu, $\$a\$-$, $\$q\$-$, $\$¥\lambda\$-$

generalization of poly-Bernoulli numbers and poly-Cauchy numbers, Korean-Japan Workshop on Algebra and Combinatorics 2014 (KJ2014) (2014年1月23日~25日) 2014年1月23日 KAIST、韓国 **招待講演**

- Takao Komatsu, Convolution identities for Cauchy numbers, Integers Conference (2013年10月24日~10月27日), 10月24日 University of West Georgia, USA
- Takao Komatsu, Some remarks on poly-Cauchy numbers and polynomials, JA2013 (2013年7月1日~5日) 7月2日 フーリエ研究所、グルノーブル、フランス
- Takao Komatsu, Poly-Cauchy numbers and their combinatorial properties, The 13th Japan-Korea Workshop on Algebra and Combinatorics (2013年1月24日~25日) 2013年1月24日 九州大学
- Takao Komatsu, Poly-Cauchy polynomials, RAMA8 (8eme Rencontre d'Analyse Mathematique et ses Applications) (2012年11月26日~11月29日) 2012年11月28日 USTHB アルジェ(アルジェリア) **招待講演**
- Takao Komatsu, Poly-Cauchy numbers and their characteristic properties, ICNA2012 (International conference in Number Theory and applications 2012) (2012年10月24日~26日) 2012年10月26日 カセットサート大学 タイ王国 **招待講演**
- Takao Komatsu, Some relationships between poly-Cauchy numbers and poly-Bernoulli numbers, The 15th International Conference on

Fibonacci numbers and their applications (2012年6月25日~29日) 2012年6月26日 エステルハーズィ・カーロイ教育大学 エゲル ハンガリー

- Takao Komatsu, Hypergeometric Cauchy numbers, 「数系と置換 2012」 (2012年6月4日~8日) 2012年6月5日 京都大学数理解析研究所
- Takao Komatsu, Diophantine approximations of Hurwitz and Tasoiev continued fractions, International Skorobohat'ko Mathematical Conference (2011年9月19日~23日) Ivan Franko Pedagogical University of Drohobych, Drohobych, ウクライナ
- Takao Komatsu, Three-term leaping recurrence relations and their extensions, DIMACOS11-FSTM, International Conference on Discrete Mathematics & Computer Sciences (2011年5月5日~8日) 5月7日 ハッサン第2大学、モハマディア、モロッコ、 **招待講演**
- 小松尚夫, Hurwitz 連分数, Tasoiev 連分数と π ディオファントス近似, 日本数学会東北支部会 **特別講演** 2011年2月19日 東北大学川井ホール
- Takao Komatsu, On the nearest integer of the sum of reciprocal Fibonacci numbers, The 14th International Conference on Fibonacci numbers and their applications (2010年7月5日~9日) 2010年7月5日, メキシコ 国立自治大学モレリア数学研究所

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.st.hirosaki-u.ac.jp/~komatsu/kenkyu.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小松 尚夫 (KOMATSU, Takao)
弘前大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：70300556

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

宗政 昭弘 (MUNEMASA, Akihiro)
東北大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号：50219862
秋山 茂樹 (AKIYAMA, Shigeki)
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授

授

研究者番号：60212445
田中 孝明 (TANAKA, Takaaki)
慶応義塾大学・理工学部・講師
研究者番号：60306850