様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年６月３日現在

機関番号：１４３０３
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2012
課題番号：22540019
研究課題名（和文）　最大円分体の不分岐拡大体のガロア群
研究課題名(英文)　Galois groups of unramified extensions over maximal cyclotomic fields

研究代表者
朝田　衛（ASADA　MAMORU）
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・教授
研究者番号：30192462

研究成果の概要（和文）：有理数体に１のべき根をすべて添加して得られる代数体をＫとする。ガロア群が可解でないＫの不分岐ガロア拡大についての以前の結果を強めることができた。結果は次の通りである。ｐを５以上の素数とするとき、Ｋの不分岐ガロア拡大体でそのガロア群がSL2(Zp) の可算個の直積と同型となるものが存在する。

研究成果の概要（英文）：Let K be the field obtained by adjoining all roots of unity to the rationals.
We have strengthened our previous result on unramified Galois extensions of K having non-solvable Galois groups. The result is as follows. There exists an unramified Galois extension of K having the direct product of countable number of copies of SL2(Zp) as the Galois group, p being any prime greater than 3.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	500,000	150,000	650,000
２０１１年度	500,000	150,000	650,000
２０１２年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総　計	1,500,000	450,000	1,950,000

研究分野：数論
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：(1) 代数学

１．研究開始当初の背景

有限次代数体と有限体上の１変数代数関数体との類似はよく知られているが、大きな違いのひとつに、代数体の場合、関数体と異なり、定数拡大というものがない、ということがある。定数拡大の類似物の候補として、古くから考えられているものに、１のべき根をすべて添加した最大円分体がある。(これは類体論を関数体の場合も含めて取り扱うとき、特に相互律の証明手法に関して、意識されていたようである。) もう少し新しいものとしては、素数 ｐ をひとつ固定して、１のｐべき乗根だけを添加した円分体もあり、岩澤理論として大きな一分野を形成している。それに比べた場合、最大円分体を定数拡大の類似物とみなす立場の研究は、いまだ十分な広がりを持っているとは言いがたく、未開の部分がかなりあるように思われる。

関数体の場合、合同ゼータ関数が、定数拡大体のガロア群の、最大不分岐アーベル拡大体への作用と結びついており、岩澤理論においてもｐ進Ｌ関数に関して、同様な現象があ

る（岩澤主予想)。これらに鑑みると、最大円分体の最大不分岐アーベル拡大体のガロア群において、類似の現象がないか、と夢想することを禁じ得ない。

研究開始当初より以前に、最大円分体の、分岐を制限した素数べき次アーベル拡大体のガロア群の構造についての結果を得ていた。それは、円分ガロア群の内、素数べき指数が 2 以上の部分から生ずる部分群の作用も込めた構造である。素数乗根だけから生ずる体 Kt の（円分）ガロア群の作用についての研究が、基本的なことのひとつとして浮かび上がると同時に、最大円分体ではなく、その部分体である Kt 自身を定数拡大体の類似物とみなせる、という事実を認識し始めていた。

２．研究の目的

有限次代数体に１のべき根をすべて添加した最大円分体 K および 1 の素数乗根だけを添加した円分体 Kt を考える。あまり知られていないように思われるが、有限体の代数閉包は、1 の素数乗根だけを添加しても得られる。また、この事実より、基礎体の素点のこの拡大体における分解群を惰性群で割った商群は、素点のフロベニウス置換で生成される free profinite 群となることが従う。これにより、体 Kt もまた、関数体の場合の定数拡大の類似物の候補と見なすことができる。ふたつの体 K, Kt の種々のガロア拡大体のガロア群の構造、特にアーベル拡大体のガロア群の、円分ガロア群の作用も込めた構造を調べることを目的とする。

３．研究の方法

代数的整数論の一般論としてはもっとも完成されたものである類体論は、ガロア群のコホモロジー論を用いて整理され、深められた。また、無限次拡大体のガロア群の理解も、profinite 群の一般論が整備されたことにより深められ、例えば、古典的な embedding problem との関連も明らかになった。これら、代数体および局所体に関するコホモロジー理論、embedding problem の理論を主な道具として用いる。また、岩澤理論で得られている結果や有限次代数体と有限体上の関数体との類似を念頭に置くのは当然であるが、特に最近発展してきた関数体の数論的基本群に関する結果を念頭に置きながら、研究目的に述べたガロア群の構造を調べる。

４．研究成果

(1)大きな pro-p 拡大体のガロア群がその種々の部分群（分解群や惰性群など）で生成される部分群の自由積に分解されるかどうかという研究は、基礎体が有限次代数体の場合や、1 の p べき乗根全体を添加して得られる円分体の場合などに、Neukirch により始められた。その後も O. Neumann, K. Wingberg などにより、いろいろと研究されている。そして、自由積に分解される、というタイプのいくつかの結果が成り立っている。

有限次代数体に 1 の素数乗根全体を添加した体を Kt とし,ひとつの素数 p に対して、p の外で不分岐な Kt の最大 pro-p 拡大体を M(p) で表す。体 Kt が、有限体の代数閉包上の関数体の類似物と見なす立場からすれば、Gal(M(p)/Kt) の p-素点の惰性群全体で生成される部分群が、惰性群たちの free pro-p product になるかどうか、という問題が考えられる。

Gal(M(p)/k) 自身は free pro-p 群であることが、以前の研究成果として得られているので、惰性群全体で生成される部分群も（一般論により） free pro-p 群である。(ちなみに、それによる商群は、Kt の最大不分岐 pro-p 拡大体のガロア群であるが、それも free pro-p 群であることが知られており（内田興二)、以前の研究成果の証明手法もそれにならうものである。)

研究当初は、この問題について、基礎的な事実を調べた。まず、基礎的なこととして、Gal(M(p)/Kt) の無限個の部分群の free pro-p product をどう定義するか、ということを調べた。自由積の最も一般的な取り扱いは、今のところ、bundle of groups の generalized product と呼ばれるものである (Neukirch-Schimidt -Wingberg, Cohomology of Number Fields)。　上述の問題に即して言えば、まず、代数体（無限次でもよい）の素点全体の集合に、適当な位相 (constructive topology と呼ばれる）を入れる。このとき、その位相に関して、惰性群全体が Gal(M(p)/Kt) の連続な部分群の族になり、それらに対する free pro-p product が定義される。Gal(M(p)/Kt) が惰性群たちの free pro-p product に分解するためのコホモロジー群による判定条件を確かめ、それが Gal(M(p)/Kt) について満たされているかどうかを考察する必要があるが、現在までには、具体的な成果は得られていない。

(2)Kt のイデヤル類群について、以前のふたつの結果との関連性を考察した。簡単のため基礎体を有理数体とする。

まず、Kt に 1 の p べき乗根をすべて添加した体を Kp とし、Kt および Kp のイデヤル類群の（複素共役に関する）マイナスパートを考える。ガロア群 Gal(Kp/Kt)は後者へ作用するが、その作用もこめた加群の構造は、以前決定している。前者から後者への自然な準同型は単射であることがわかるので、その像の特徴付けが問題となる。像の明らかな特徴は、ガロア群の作用はそこには自明であること

である。しかし、像はガロア群が自明に作用する部分よりはずっと小さいであろうと思われる。

一方、v を Kt の有限素点でその剰余標数が p であるものとする。v の Kt における惰性体を F, 分解体を Z とし、分解群を G (=Gal(F/Z))とする。G は、有限体の絶対ガロア群と同じく、一つの元で生成される free profinite 群と同型となり、分解体と惰性体の間は、いたるところ不分岐となる。G は F 上の種々のアーベル拡大体のガロア群に作用する。p の外で不分岐な最大 pro-p アーベル拡大体を M とすると、M の F 上のガロア群 Gal(M/F)は pro-p アーベル群でしかも G が作用する。従って、G の p 進整数環上の完備群環を A とすれば、自然に A 上の加群となる。以前の結果では（基礎体が有理数体の場合)、Gal(M/F)は、A 加群として、可算無限個の A の直積と同型となることを示していた。

Kt は１の p 乗根は含むが、p べき乗根すべては含まない。それゆえ、Kt のイデヤル類群のマイナスパートの内、位数 p の元からなる部分群は p の外で不分岐なアーベル p 拡大のガロア群の指標群と見なせる。上に述べた以前の結果をもう少し精密にすれば、この部分の記述ができると思われるが、それは詰め切れていない。(イデヤル類群のマイナスパート「全体」は上に述べたガロア群の構造だけでは記述できないと思われる。)

(3) 再び有限次代数体に１のべき根をすべて添加して得られる代数体を K とすると、K の最大不分岐可解拡大体のガロア群の構造については、内田興二氏により、位相群としては可算無限個の元によって生成される free pro-solvable group であることが示されている。

ガロア群が可解でない K の不分岐拡大については、基礎体が有理数体の場合に、かなり以前にいくつかの結果を得ていたが、そのうちの一部をかなり強めることができた。

以下、基礎体は有理数体とし、有理数体に 1 のべき根をすべて添加して得られる最大円分体を同じ記号 K で表す。最も以前の結果(の少し弱い形) は、p を 5 以上の素数とするとき、K の不分岐ガロア拡大体でそのガロア群が PSL2(Fp)と同型となるものが無数に存在する、というものである。これは、有理数体上の特殊な楕円曲線の p 等分点を用いて示されるが、その方法では、ひとつの楕円曲線のすべての p べき等分点を用いることができず、従ってガロア群が PSL2(Zp)と同型となる不分岐拡大体を構成することはできない。

少し以前に、内田氏の結果を用いるとガロア群が SL2(Zp)と同型となる不分岐拡大体の存在を示すことができることに気づいていたが、今般、このような拡大体が無数にかつ強い意味で独立に存在することを示すことができた。具体的に述べれば、次のようになる。p を 5 以上の素数とするとき、K の不分岐ガロア拡大体でそのガロア群が SL2(Zp)の可算個の直積と同型となるものが存在する。

証明の概略を述べる。以前の結果を強めることができる要点は、L を K の最大不分岐ガロア拡大とするとき、Gal(L/K)が profinite 群として射影的である、という内田の結果と SL2 の群論的性質（主に Serre による）である。

まず、以前の結果により、K の不分岐ガロア拡大 k でガロア群が PSL2(Fp)と同型なものがある。Gal(L/K)の射影性と SL2(Fp)が PSL2(Fp)と{±１}との半直積に分解しないという事実から k は K の不分岐ガロア拡大体でガロア群が SL2(Fp)と同型なもの E に埋め込まれることが従う。再び Gal(L/K)の射影性と、SL2(Zp)の閉部分群 X の reduction mod p が SL2(Fp)ならば X は SL2(Zp)に一致するという事実（Serre による）から E は K の不分岐ガロア拡大体でガロア群が SL2(Zp)と同型なもの F に埋め込まれることが従う。

以前の結果では上述の k は相異なる無限個 k1,k2,…,kn,…存在することがわかっている。各 kn について上に述べた方法で存在がわかる K の不分岐ガロア拡大体 E, F にあたる体を En, Fn とする。まず、PSL2(Fp)が非可換単純群であることから、合成体 k1…kn の K 上のガロア群は PSL2(Fp)の n 個の直積と同型となることが従う。次に上に述べた群 SL2(Fp)の性質を利用すると、合成体 E1…En の K 上のガロア群は SL2(Fp)の n 個の直積と同型となることが従う。最後に、やはり上に述べた群 SL2(Zp)の性質を利用すると（この部分も Serre によるのだが)、合成体 F1…Fn の K 上のガロア群は SL2(Zp)の n 個の直積と同型となることが従う。n は任意の自然数でよいから、これより上に述べた結果が従うことになる。

有理数体に１の素数乗根だけを添加して得られる体を Kt , Kt の最大不分岐ガロア拡大と K の合成体を M0 とする。ガロア群 Gal(K/Kt)は有限体の絶対ガロア群とほぼ同型であり、Gal(L/K)に外部自己同型として作用する。Gal(M0/K)へのこの作用は自明なものであるから、M0 に含まれていない K の不分岐なガロア拡大が得られている方が興味深い。以前の結果で得られている上記の拡大体 kn はいずれも M0 に含まれていない。従って、PSL2(Fp)の単純性から、kn と M0 の合成体は M0 上でも PSL2(Fp)をガロア群として持ち、また相異なる。ガロア群 Gal(L/M0)も（内田の結果により）射影的であるから、上に述べた証明の議論を適用すると、M0 上でも、不分岐ガロア拡大体でそのガロア群が SL2(Zp)の可算個の直積と同型となるものが存在する

ことがわかる。

(4)最後に、研究の最終段階で考察を始めた問題について述べておく。再び有理数体に l の素数乗根全体を添加した体を Kt とし、p の外で不分岐な Kt の最大 pro-p 拡大体を(同じ記号) M(p) で表す。p と異なる各素数 l に対して、ガロア群 Gal(M(p)/Q) での l の分解群 Dl をひとつ決める。Dl の部分群である惰性群は有限巡回群で、その商は l のフロベニウス置換により生成される free profinite 群である。このようにして、ガロア群の部分群の族{Dl}が得られる。((1)で述べた惰性群の部分群の族とは異なる。)

問題は、これらの部分群の「関係」である。具体的には、例えば、これらの部分群から有限個を選んだとき、それらが生成する部分群はガロア群の中で、自由積となるかどうかといった問題が考えられる。(有限個ではなくすべての Dl を考えれば、自由積にはならないであろうが。) 自由積分解について調べたことを基にして、このような問題について考察するのが今後の課題である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件） ①朝田　衞 On the ideal class groups of the maximal cyclotomic extensions of algebraic number fields, Journal of the Mathematical Society of Japan（印刷中）（査読有）

〔学会発表〕（計 0 件）

６．研究組織
(1)研究代表者
朝田　衞（ASADA　MAMORU）
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・教授
研究者番号：30192462

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：