

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年5月25日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540020

研究課題名（和文）コクセター亜群の構造をもつ一般化された量子群の普遍的な表現論の展開

研究課題名（英文）Development of a universal representation theory of generalized quantum enveloping algebras with structures of Coxeter groupoids

## 研究代表者

山根 宏之 (YAMANE HIROYUKI)

大阪大学・大学院情報科学研究科・准教授

研究者番号：10230517

研究成果の概要（和文）：多パラメータ付量子超代数については定義関係式のより深い研究や対応するニコルス代数の研究を行った。有限ルート系をもち無限次元である一般化された量子群をワイル亜群の最長元の特別な被約表示を用いて有限次元既約最高ウェイト加群を分類した。一般化された量子群に対して量子2重構成法を用いて普遍R行列の明示的な公式を与えた。多変数アフィンルート系に対して基の一般化として反射基を導入しE型以外のときに分類をした。

研究成果の概要（英文）：Yamane with his coworkers made deeper studies of defining relations of multi-parameter quantum superalgebras and corresponding Nichols algebras. Yamane with his coworkers classified the finite dimensional irreducible highest weight modules of generalized quantum groups by using special reduced expressions of longest elements of Weyl groupoids. Yamane with his coworkers gave an explicit formulas of the universal R-matrices by using the quantum double construction. Yamane with his coworkers introduced a notion of the reflectable base, as a generalization of base, and classified them except for E-types.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
2012年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：ワイル亜群、一般化された量子群、ニコルス代数、多変数アフィンリー代数

## 1. 研究開始当初の背景

## (1) 一般化された量子群の研究

単純リー代数やカツムーディーリー代数のルート系の対称性を記述するワイル群の重要性はその代数系の構造や表現論を研究する強力な手段として広く認識されて来

た。例えばワイルの指標公式やその拡張であるカズダン・ルスティックの指標公式などの既約最高ウェイト加群の指標公式は和アイル群を用いて記述される。一方リー代数の次数付き拡張であるリー超代数は1977年にカツによる基本的な論文が発表された

頃から研究が盛んに行われてきた。最近ではその指標公式がかなり明らかになってきている。単純リー代数とは異なり単純リー超代数のカルタン部分代数達はワイル群の作用では共役ではない。それにもなってディンキン図形は唯一に決まらない。因みに単純リー超代数のワイル群はパリティがゼロの部分のなす半単純リー代数のワイル群として定義される。ディンキン図形は唯一に決まらないが有限個の奇反射で移り合う事が1980年代から指摘されてきた。奇反射も単純リー超代数の指標公式の研究に有用であるということがセルガバナにより指摘されている。このような事から半単純リー超代数のワイル群に奇反射を取り込んだワイル群の重要性が認識されていた。セルガバナによりカルタン部分代数達はワイル群の作用で移り合う事が示された。研究代表者の山根はヘッケンバーガーとの共同研究でワイル群の元の被約表示はコクセター関係式の有限回の取り換えで移る事を示した。

1985年ごろドリinfeldと神保は独立に単純リー代数やカツ・ムーディーリー代数の包絡代数の $q$ 変形として量子群の概念を導入した。山根は1999年出版の論文でA型量子群のポアンカレ・ヴァーコフ・ヴィット型基底を与えた。ドリinfeldは量子群のテンソルの中に普遍R行列が存在することを示した。またドリinfeldは普遍R行列が具体的に量子2重法で構成されることを示した。普遍R行列の具体的な形が直接役に立つことは少ないが量子2重法で構成されるという事実が結び目理論、可解格子模型、共形場理論などに現れる具体的なR行列を用いた哲学的な影響は計り知れない。カツ・ムーディーリー代数のセールの関係式を用いない構成法の類似として、量子2重法によって量子群そのものを定義することが出来る。山根は1996年出版の論文で単純リー超代数の量子群である量子超代数の論文ではその定義で定義された量子群の定義関係式を求め、さらに量子2重構成法で普遍R行列を構成した。その定義関係式から単純リー超代数の定義関係式が得られるがそれまで知られていないものであった。山根は1999年出版の論文でアフィンリー超代数およびアフィン量子超代数の定義関係式を求めた。量子2重法によって量子群の定義する方法はアンドラスキューヴィッチ・シュナイダーによる(点付)ホップ代数の分類理論に影響を及ぼした。カルチェンコは任意の双指標に対して量子2重法による量子群が(広義の)ポアンカレ・ヴァーコフ・ヴィット型基底をもつことを示した。ヘッケンバーガーはこれらの理論を駆使して双指標による量子群の中で有限型ポアンカレ・ヴァーコフ・ヴィット型基底を持つものを分類した。その

分類でヘッケンバーガーはワイル群を駆使した。ヘッケンバーガーと山根は2008年出版の論文でカルチェンコのポアンカレ・ヴァーコフ・ヴィット型基底から得られる一般化したルート系を公理化しそれによりワイル群の抽象的な定義を与えそれをもとにしてワイル群のコクセター型の定義関係式を与えさらには同じ元の被約表示達はブレイド関係式による有限回の取り換えで移り合う事を示した。ヘッケンバーガーと山根とは2010年出版の他2名の物理学者の共著論文でアフィン歪D型リー超代数の量子超代数のワイル群の基本コルートの被約表示およびそれらの元が満たす関係式を駆使して第2ドリinfeld実現を求めた。

## (2) 楕円リー代数の研究

1990年にムーディー・ラオ・横沼の基本的な論文が出版されたことを皮切りにして楕円リー代数の研究が盛んにおこなわれるようになった。斎藤・吉井は2000年に出版された論文でADE型楕円リー代数の有限個からなる定義関係式を与えた。山根は2004年に出版された論文で階数が2以上の楕円リー代数の有限個からなる定義関係式を与えた。

## 2. 研究の目的

(1) ワイル群を用いて一般化された量子群の構造論および表現論を研究する。

① 2010年当初に証明が完成していた一般化された量子群のシャポバロフ行列式の公式さらに整備して論文としてまとめること

② シャポバロフ行列式の公式をもとにしてカツ・カズダンの手法で一般化された量子群のハリシュ・チャンドラ理論の構成

③一般化されたアフィン量子超代数の第2ドリinfeld実現や普遍R行列の構成

(2) 多変数アフィンルート系および多変数アフィンリー代数を研究する。

## 3. 研究の方法

(1) 国内外の研究者を訪問、招待するなどして研究交流をおこなった。

① 2010年4月20日—23日は

Christian Kassel 氏を招待し京都大学数理解析研究所で講演をしていただいた。

② 2010年10月26日—31日は Hans Schneider 教授を招待し大阪表現論セミナー、岡山大学、広島大学で講演をしていただいた。

③ 2011年1月1日—23日は Ian Musson 教授を招待し京都大学数理科学研究所で集中講義をしていただき、名古屋大学、筑波大学で講演をしていただいた。

④ 2011年12月1日—8日は Saeid Azam 教授, Malihe Yousofzadeh 氏招待し大阪大学数学教室、大阪市立大学数学教室で講演をしていただいた。

(2) Mathematica で非可換代数をグレブナー法で計算するプログラムを作成し研究に役立てた。

#### 4. 研究成果

(1) 2変数以上の多変数アフィンルート系には基が存在しない。山根は Saeid Azam, Malihe Yousofzadeh との共同研究で反射基の概念を導入し E 型以外に対して反射基を分類した。ここで反射基とはワイル群の作用で実ルート系を覆う極小の集合のことである。この研究は 2012年に J. Algebra に掲載された。また我々は (1変数) アフィンルート系の基のマクドナルドによる存在定理の代数的かつ初等的な別証明を与えた。それは 2012年に RIMS Kôkyûroku Bassatsu に掲載された。

(2) 山根は Saeid Azam, Malihe Yousofzadeh との共同研究でワイル群の最長元の特別な被約表示を用いることにより有限ルート系もち正部分が無限次元である一般化された量子群の既約最高ウェイト加群の分類をおこなった。プレプリントを作成し arXiv:1105.0160 で発表した。

(3) Ivan Angiono との共同研究で一般化された量子群の普遍 R 行列を構成した。これにはワイル群の最長元とヘッケンバーガーが構成したルスティック同型写像を用いた。ドリンフェルトの量子 2 重構成法の深い意味をみいだすことによって各ルスティック型ルートベクトルのドリンフェルト内積の値も求めることが出来た。プレプリントを作成し arXiv:1304.5752 で発表した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

1. S. Azam, H. Yamane, M. Yousofzadeh, An exposition of root systems and Lie algebras (affine and elliptic). RIMS Kôkyûroku Bassatsu B36 (2012), 17-42. 査読有

2. S. Azam, H. Yamane, M. Yousofzadeh, Reflectable bases for affine reflection systems. J. Algebra 371 (2012), 63-93. 査読有

3. N. Andruskiewitsch, I. Angiono, H. Yamane, On pointed Hopf superalgebras. Contemp. Math. 544 (2011) 123-140. 査読有

4. I. Heckenberger, H. Yamane, Drinfel'd doubles and Shapovalov determinants. Rev. Un. Mat. Argentina 51 (2010), no.2, 107-146. 査読有

5. S. Azam, H. Yamane, M. Yousofzadeh, A finite presentation of universal coverings of Lie tori, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 46 (2010), no. 3, 507-548. 査読有

[学会発表] (計 25 件)

1. Hiroyuki Yamane, Exposition on root systems and Lie algebras (affine and elliptic), Harish-Chandra Research Institute Mathematics Seminar, 2013年1月3日 インド アラハバード Harish-Chandra Research Institute

2. Hiroyuki Yamane, Harish-Chandra theorem of generalized quantum groups, Harish-Chandra Research Institute Mathematics Seminar, 2013年1月1日 インド アラハバード Harish-Chandra Research Institute

3. Hiroyuki Yamane, Nichols topology inside Zariskii topology, Harish-Chandra Research Institute Mathematics Seminar, 2012年12月28日 インド アラハバード Harish-Chandra Research Institute

4. Hiroyuki Yamane, Shapovalov determinants via Weyl groupoids, Harish-Chandra Research Institute

Mathematics Seminar, 2012年12月26日 インド アラハバード Harish-Chandra Research Institute

5. 山根宏之, コクセター半群と表現論, 富山大学理学部数学教室談話会, 2012年12月20日

6. 山根宏之, ワイル歪群と一般化された量子群の表現論, 2012年度表現論シンポジウム, 2012年12月5日, 鹿児島県鹿児島市 マリンパレスかごしま

7. Hiroyuki Yamane, Harish-Chandra theorem of Drinfeld doubles, Oberwolfach 1240a Mini-Workshop: Nichols Algebras and Weyl Groupoids, 30 September 2012-6 October 2012, 2012年10月1日, Oberwolfach 研究所, Germany

8. 山根宏之, Harish-Chandra type theorem of generalized quantum groups, RIMS 研究集会 ホップ代数と量子群-応用の可能性 2012年9月4日, 京都大学数理解析研究所

9. 山根宏之, 一般化された量子群のハリス・チャンドラ型定理, 筑波大学数学教室代数特別セミナー, 2012年8月27日, 筑波大学数学教室

10. 山根宏之, アフィン・ルート系の基の存在定理について, 第28回リー代数サマーセミナー, 2012年8月25日, 山口大学

11. 山根宏之, Quantum superalgebras and Mathematica, Affine quantum superalgebras and Mathematica, 第15回代数群と量子群の表現論研究集会 2012年5月22日, 長野県 長野市 いこいの村 アゼリア飯綱

12. Hiroyuki Yamane, Quantum superalgebras and Mathematica, Marburg 大学 数学教室 特別セミナー, 2012年3月14日, ドイツ マールブルク大学数学教室

13. 山根宏之, Mathematica によるスーパー量子群の計算について, 筑波大学数学教室代数特別セミナー, 2012年2月20日, 筑波大学数学教室

14. Hiroyuki Yamane, Irreducible representations of generalized quantum groups, Harish-Chandra Research Institute

Mathematics Seminar, 2012年1月4日 インド アラハバード Harish-Chandra Research Institute

15. Hiroyuki Yamane, Harish-Chandra map of generalized quantum groups, Harish-Chandra Research Institute Mathematics Seminar, 2012年1月2日 インド アラハバード Harish-Chandra Research Institute

16. Hiroyuki Yamane, Shapovalov dereminants via Weyl groupoids II, Harish-Chandra Research Institute Mathematics Seminar, 2011年12月30日 インド アラハバード Harish-Chandra Research Institute

17. Hiroyuki Yamane, Shapovalov determinants via Weyl groupoids, Harish-Chandra Research Institute Mathematics Seminar, 2011年12月28日 インド アラハバード Harish-Chandra Research Institute

18. Hiroyuki Yamane, Dinkyn diagrams of simple Lie superalgebras and Weyl groupoids, Harish-Chandra Research Institute Mathematics Seminar, 2011年12月26日 インド アラハバード Harish-Chandra Research Institute

19. Hiroyuki Yamane, Irreducible modules and longest elements of Weyl groupoids, Cordoba 大学数学教室 Lie 理論セミナー 2011年9月13日, アルゼンチン コルドバ大学数学教室

20. 山根宏之, Drinfeld elements of quantum affine superalgebras, 広島数理物理セミナー, 2011年8月30日, 広島大学

21. Hiroyuki Yamane, Representation Theory with Weyl Groupoids, International Workshop and Conference on Infinite Dimensional Lie Theory and Its Applications, May 10-17 2011, 2011年5月16日 数物研究所, Tehran Iran

22. N. Andruskiewitsch, I. Angiono, H. Yamane, Defining relations of generalized quantum algebras having ABCD-type super root systems, 2011年日本数学会春季年会無限可積分系セッション, 2011年3月23日, 早稲田大学理工学術院

23. 山根宏之, Preliminary to Harish-Chandra theorem of Drinfeld doubles, 研究集会ホップ代数と量子群 2010年10月19日 筑波大学数学教室

24. 山根宏之, Longest elements of Weyl groupoids and finite dimensional representations, 第13回代数群と量子群の表現論 2010年6月5日愛知県江南市すいとびあ江南

25. 山根宏之, Weyl groupoids applied to representation theory, RIMS 研究集会量子群と量子トポロジー 2010年4月19日, 京都大学数理解析研究所

[その他]  
ホームページ等

<http://hiroyukipersonal.web.fc2.com/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

山根 宏之 (YAMANE HIROYUKI)

大阪大学・大学院情報科学研究科・准教授  
研究者番号：10230517