

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 29 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2014

課題番号：22540021

研究課題名(和文)有限群の指標間のパーフェクト・アイソメトリの一般化について

研究課題名(英文)Generalizations of perfect isometries between the sets of characters of finite groups

研究代表者

宇野 勝博(UNO, KATSUHIRO)

大阪大学・全学教育推進機構・教授

研究者番号：70176717

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：位数が小さいシロー部分群をもつ有限単純群を分類し、分類に現れる群のシロー部分群となり得る群の決定を行い、その中で、考えている素数が小さく、かつ、シロー部分群が非可換の場合に、その群上のフュージョン・システムの分類を行った。

また、上で現れる有限単純群でシロー部分群およびそれ上のフュージョン・システムが同じ場合、主ブロックの指標間にパーフェクト・アイソメトリが存在することをほとんどの場合に確認した。なお、その際、一般化されたパーフェクト・アイソメトリが存在すると予想されていたが、本研究で確認できたものは通常のパーフェクト・アイソメトリであった。

研究成果の概要(英文)：We classify finite simple groups having small Sylow subgroups and determine the structure of groups appearing as Sylow subgroups of those finite simple groups. Moreover, in the case where the prime is small and a Sylow group is not abelian, we determine fusion systems over such Sylow groups.

For finite simple groups appearing in the above classification with the same Sylow subgroups and the same fusion systems over them, we construct perfect isometries between the set of irreducible characters belonging to the principal blocks of them. These isometries are those defined by Broue, namely, the ordinary perfect isometries, and not generalizations of them.

研究分野：群および多元環の表現論

 キーワード：有限群 指標 フュージョン・システム ブロック パーフェクト・アイソメトリ シロー部分群 ブル
 ーエ予想 有限単純群

1. 研究開始当初の背景

有限群の表現論では、以前から有限群 G とそのシロー部分群 P の正規化群 $H=N_G(P)$ について、その既約表現の関係を解明することが大きな目標であった。1980年代には、ブルーエによって予想が定式化(パーフェクト・アイソメトリの存在予想、導来同値の存在予想)されたが、これは、 P が可換の場合のみの予想であった。

P が可換であれば、 P を中心にした共役関係を記述するフュージョン・システムが G と H について等しいという背景がブルーエ予想にはある。

P が非可換の場合のフュージョン・システムの記述は容易ではなく、例えば、A.Ruiz, A.Viruel により、ようやく一部の非可換群の場合に分類が完成した所であった。このように、 P が非可換の場合のフュージョン・システムの分類の第一歩が踏み出されたことを踏まえると、ブルーエ予想の定式化は P が一般の場合に拡張されるべきであり、実際、A.Ruiz, A.Viruel が分類した場合の研究などに基づき、ブルーエ予想を P が非可換の場合に拡張する方向性が見え始めていた。

2. 研究の目的

有限群のシロー部分群 P 上のフュージョン・システム間の同値関係と既約表現間のパーフェクト・アイソメトリとの関係を解明し、 P が非可換である場合のいくつかの例について、一般化されたパーフェクト・アイソメトリの存在を立証する。より具体的には、以下の通りである。

- (1) P が非可換である場合に、できるだけ多くの例について、一般化されたパーフェクト・アイソメトリの存在を立証する。
- (2) フュージョン・システムの同値類を考察し、どの同値関係がどの程度強いパーフェクト・アイソメトリの存在を導くかについて多くの事例を検討し、その定式化を試みる。

(3) 一般化されたパーフェクト・アイソメトリの加群論的、圏論的意味付けについて考察する。

3. 研究の方法

(1) 位数が p の 4 乗である非可換群の場合にそれ上のフュージョン・システムの分類を試みる。シロー群が同じで、それ上のフュージョン・システムも同じである群の主ブロック間に一般的なパーフェクト・アイソメトリが存在することを立証する。

(2) 一般化されたパーフェクト・アイソメトリとフュージョン・システム間の同値関係を精査する。このことから、フュージョン・システムのどのような同値性のもとで、どのような不変量が保存されるのかを明らかにする。これは、シロー群 P をもつ有限群 G と P の正規化群 $H=N_G(P)$ では、いわゆる高さ (height) が 0 である既約指標の個数が同じになるのではないかというアルペリン-マツカイ予想の背景をフュージョン・システムの同値性から考察することである。

(3) ブルーエ予想の場合、パーフェクト・アイソメトリの存在のみならず、ブロック多元環間の導来同値の存在も予想されている。一般化されたパーフェクト・アイソメトリについても加群論、圏論の見地から、その背景を考察する。シロー部分群 P が非可換の場合、一般的には導来同値は成立しないので、加群圏の導来圏だけではなく、その部分圏、商圏など、導来圏に付随する圏との関係も考察する。

4. 研究成果

(1) 有限単純群の分類結果とそのシロー p -部分群 (p は奇素数) についての知られた結果を用い、位数が p の 4 乗, 5 乗, 6 乗である p -群 P をシロー p -部分群にもつ単純群の分類を完成した。分類には、Gorenstein 等による単純群のシロー p -部分群の分析結果を用いた。分類に現れる群は、散在型のは極めて少なく、

特に例外的な構造のシロー p -部分群をもつ有限単純群は散在型のみであった。

(2) (1)の結果において、 P が非可換の場合は、 P の位数が p の4乗の場合は、コンウェイの散在型単純群 Co_1 以外は $p=3$ の場合に限られ、その場合に現れる P の同型類は次数9の対称群のシロー 3 -部分群に同型なものと、 D 型のシュバレー群の位数3の自己同型により得られるねじれ型の単純群のシロー 3 -部分群に同型なものに限られる。従って、 P とそれ上のフュージョン・システムとしては、極めて限られたものしか存在せず、実際、 $p=3$ の場合については、フュージョン・システムの分類もほぼ完成している。

(3) (1)の結果において、 P が非可換の場合は、 P の位数が p の5乗、6乗の場合も、 $p=3, 5$ 、または、7の場合に限られ、散在型の単純群では、 P の位数が3の5乗のときのヤンコの3番目の群 J_3 、3の6乗のときのマクラフリンの群 McL 、7の6乗のときのモンスター M などである。さらに、散在型でない単純群については、 P の構造も限定的なものに限られる。

(4) P の位数が3の4乗で P が非可換の場合、(1)(2)の分類で得た単純群の中で、シロー 3 -部分群およびそれ上のフュージョン・システムが同じである有限シェバレー群については、そのほとんどの場合に、主ブロック間にパーフェクト・アイソメトリが存在することを確認した。具体的には、6次一般線形群、7次一般線形群、6次ユニタリ群、7次直交群、8次直交群、6次斜交群から得られる単純群である。ここで存在が確認されたパーフェクト・アイソメトリは一般化されたものではなく、元々ブルーエが定義したパーフェクト・アイソメトリである。なお、本研究開始以前に知られていた4次一般線形群、4次ユニタリ群や交代群の場合と合わせ、 P の位数が3の4乗で P が非可換の場合のパーフェクト・アイソメトリについては、基本的な場合はほぼすべて存在を確認したことになる。

(5) P の位数が3の5乗で P が非可換の場合については、同じ P をシロー 3 -部分群にもち、 P 上のフュージョン・システムも同じである単純群をいくつか選び、主ブロック間にパーフェクト・アイソメトリが存在することを確認した。この場合も計算した例については、一般化されたものではなく、従来のパーフェクト・アイソメトリの存在が確認できた。なお、(4)(5)におけるパーフェクト・アイソメトリの計算には、群論計算システムGAPを用いた。

(6) (2)で述べた位数が3の4乗である非可換群と類似の構造をもつ、位数が p の $p+1$ 乗の非可換群(具体的には次数が p の2乗の対称群のシロー p -部分群)の構造分析を進め、その共役類、自己同型、組成列などを決定した。これらは、この群上のフュージョン・システムの分類にあたって必要不可欠なプロセスである。

(7) シロー p -部分群がいわゆる自明交叉の場合のパーフェクト・アイソメトリの一般化については、連携研究者である檜崎が分析を進め、単純群の場合、および、中心による剰余群が単純群になる場合で、シロー p -部分群およびそれ上のフュージョン・システムが同じ場合は、主ブロックの既約指標間に一般化されたパーフェクト・アイソメトリ、および、局所的な部分群の指標の対応も含む概念であるアイアイソタイプが存在することを確認した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計9件)

1. 飛田明彦: Cohomology of the extraspecial p -group and representations of the double Burnside algebra, 数理解析研究所講究録, 査読無, 1872巻, 2014年, 132-139,

- <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1872-14.pdf>.
2. 檜崎亮: Fusion systems and blocks with non-abelian defect groups, 数理解析研究所講究録, 査読無, 1872巻, 2014年, 108-112,
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1872-11.pdf>.
 3. Akihiko Hida, Nobuaki Yagita: Representations of the double Burnside algebra and cohomology of the extraspecial p -group, Journal of Algebra, 査読有, 409巻, 2014年, 265-319,
doi:10.1016/j.jalgebra.2014.03.021.
 4. 宇野勝博, 功刀直子: 有限群のモジュラー表現における予想について, 数学, 査読有, 65巻, 2013年, 1-23.
 5. 檜崎亮: Isotype for blocks with non-abelian defect groups, 数理解析研究所講究録, 査読無, 1784 巻, 2012 年, 150-154,
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1784-16.pdf>.
 6. 奥山哲郎: Relative projective covers and the Brauer construction over finite group algebras, 数理解析研究所講究録, 査読無, 1784 巻, 2012 年, 77-95,
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1784-09.pdf>.
 7. 飛田明彦: 有限群の両側 Burnside 環の表現論, 数理解析研究所講究録, 査読無, 1784 巻, 2012 年, 57-63,
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1784-07.pdf>.
 8. 功刀直子: Fusion system と Scott 加群の Brauer 直既約性, 数理解析研究所講究録, 査読無, 1784 巻, 2012 年, 17-20,
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1784-03.pdf>.
 9. Radha Kessar, Naoko Kunugi, Naofumi Mitsuhashi: On saturated fusion systems and Brauer indecomposability of Scott modules, Journal of Algebra, 査読有, 340巻, 2011年, 90-103,
doi:10.1016/j.jalgebra.2011.04.029.
- [学会発表](計 25 件)
1. 脇克志: Subgroups of J_4 for amalgamation, 日本数学会年会, 2015 年 3 月 23 日, 明治大学(東京都・千代田区).
 2. 石岡大寿, 功刀直子: Scott 加群の Brauer 直既約性, 日本数学会年会, 2015 年 3 月 23 日, 明治大学(東京都・千代田区).
 3. 宇野勝博: アウスランダー・ライテン・クイバーとカルタン不変量, 釧路表現論研究集会, 2015 年 2 月 22 日, 北海道教育大学釧路校(北海道・釧路市).
 4. 脇克志: J_4 の 1333 次の表現の構成, 有限群論草津セミナー, 2014 年 8 月 2 日, 草津セミナーハウス(群馬県・吾妻郡草津町).
 5. 飛田明彦: Extraspecial p -群の mod- p コホモロジーと両側 Burnside 環の作用について, 日本数学会秋季総合分科会, 2013 年 9 月 25 日, 愛媛大学(愛媛県・松山市).
 6. 宇野勝博: 対称群の被覆群の表現論, 釧路表現論研究集会, 2013 年 8 月 22 日, 北海道教育大学釧路校(北海道・釧路市).
 7. 飛田明彦: Extraspecial p -群のコホモロジーへの両側 Burnside 環の作用について, 日本数学会年会, 2013 年 3 月 22 日, 京都大学(京都府・京都市).
 8. 宇野勝博: 非可換不足群をもつブロックについて, 表現論セミナー, 2013 年 2 月 17 日, 東京医科歯科大学(東京都・文京区).
 9. 飛田明彦: Cohomology of the extraspecial p -groups and representations of the double Burnside algebra, 表現論セミナー, 2013 年 2 月 16 日, 東京医科歯科大学(東京都・文京区).
 10. 飛田明彦: Cohomology of the extraspecial p -group and representations of the double Burnside algebra, 有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組み合わせ論の研究, 2013 年 1 月 9 日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市).
 11. 檜崎亮: Fusion systems and blocks with non-abelian defect groups, 有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組み合わせ論の研究, 2013 年 1 月 9 日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市).
 12. 脇克志: J_4 の表現の構成について, 代数学と計算, 2011 年 11 月 8 日, 首都大学東京(東京都・八王子市).
 13. 檜崎亮: 非可換不足群を持つブロックの Isotype, 有限群のコホモロジー論とその周辺, 2011 年 9 月 1 日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市).
 14. 奥山哲郎: Relative projective covers

- and the Brauer construction over finite group algebras, 有限群のコホモロジー論とその周辺, 2011年8月30日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市).
15. 飛田明彦: 有限群の両側 Burnside 環の表現論, 有限群のコホモロジー論とその周辺, 2011年8月30日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市).
 16. 功刀直子: Fusion system とスコット加群の Brauer 直既約性, 有限群のコホモロジー論とその周辺, 2011年8月29日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市).
 17. 榑崎亮: isotype とその拡張について, 有限群草津セミナー, 2011年7月30日, 草津セミナーハウス(群馬県・吾妻郡草津町).
 18. 功刀直子: Scott modules and Morita equivalences for principal blocks of finite groups, Workshop "Global/local conjectures in representation theory of finite groups", 2011年3月17日, Banff International Research Station, Banff (Canada).
 19. 飛田明彦: 両側 Burnside 環の表現論について, 表現論セミナー, 2010年12月26日, 東京理科大学(東京都・新宿区).
 20. 宇野勝博: 様々な対応の様相の観察, 表現論セミナー, 2010年12月26日, 東京理科大学(東京都・新宿区).
 21. 脇克志: J_4 のモジュラー表現, 表現論セミナー, 2010年12月26日, 東京理科大学(東京都・新宿区).
 22. 奥山哲郎: $SU(3, q^2)$ の主 3-ブロック, $3|q+1$ について, 表現論セミナー, 2010年12月26日, 東京理科大学(東京都・新宿区).
 23. 功刀直子: 素数指数の巡回部分群をもつ非可換群が不足群である有限群のブロック, 日本数学会秋期総合分科会, 2010年9月22日, 名古屋大学(愛知県・名古屋市).
 24. 功刀直子: スコット加群のブラウアー直既約性について, 有限群草津セミナー, 2010年8月1日, 草津セミナーハウス(群馬県・吾妻郡草津町).
 25. 榑崎亮: Isometries and blocks with T.I. defect groups, XIV International Conference on Representations of Algebras and Workshop, 2010年8月15日, 代々木国立オリンピック青少年センター(東京都・渋谷区).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

宇野 勝博 (UNO, Katsuhiko)
 大阪大学・全学教育推進機構・教授
 研究者番号: 70176717

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者

脇 克志 (WAKI, Katsushi)
 山形大学・理学部・教授
 研究者番号: 30250591
 功刀 直子 (KUNUGI, Naoko)
 東京理科大学・理学部・准教授
 研究者番号: 50362306
 飛田 明彦 (HIDA, Akihiko)
 埼玉大学・教育学部・教授
 研究者番号: 50272274
 榑崎 亮 (NARASAKI, Ryo)
 大阪府立大学工業高等専門学校・准教授
 研究者番号: 20567929
 有木 進 (ARIKI, Susumu)
 大阪大学・大学院情報科学研究科・教授
 研究者番号: 40212641
 宮地 兵衛 (MIYACHI, Hyoue)
 大阪市立大学・理学部・准教授
 研究者番号: 90362227
 奥山 哲郎 (OKUYAMA, Tetsuro)
 北海道教育大学・教育学部・教授
 研究者番号: 60128733