

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 1 日現在

機関番号：32621

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2014

課題番号：22540031

研究課題名(和文)幾何結晶上のトロピカルR写像の構成と結晶基底への応用

研究課題名(英文)Construction of tropical R maps on geometric crystals and its applications to crystal bases

研究代表者

中島 俊樹(Nakashima, Toshiki)

上智大学・理工学部・教授

研究者番号：60243193

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：幾何結晶上のトロピカルR写像と関係が深い飾り付き幾何結晶について考察を行いA,B,C,D,G型の場合に、幾何結晶の単項式表示との関係について結果を得た。

特に、飾り付き幾何結晶の飾り関数が、一般化された小行列式の表示を経由して結晶基底の単項式表示の正係数の和の形で表示されたことは、飾り関数を仲立ちとして結晶基底の単項式表示と多面体表示の間にも興味深い関係が存在し、その結果は新しいものとなっている。

研究成果の概要(英文)：We considered decorated geometric crystals, which are deeply related to tropical R-maps on geometric crystals. For types A, B, C, D and G, we obtained several results on the relations with monomial realizations of crystal bases. In particular, decoration functions of decorated geometric crystals are expressed as a sum of monomials with positive coefficients via generalized minors, which means that there exist certain interesting relations between monomial realizations and polyhedral realizations of crystal bases and these results are all new.

研究分野：量子群、結晶基底、幾何結晶

キーワード：幾何結晶 結晶基底 トロピカルR行列 多面体表示 一般化小行列式 単項式表示 Bruhat cell ワ
イル群

1. 研究開始当初の背景

1990年頃柏原正樹によりに発見された結晶基底の理論は量子群の表現論のみならず、ヘッケ環や代数群の表現論、組合せ論、数理論理の研究などに大きな影響を及ぼし、今なお活発に研究が推進されている。結晶基底の理論の特色は、古典的なリー代数の表現論では考えることができない結晶化-つまりパラメーターの q を 0 として考えることにより複雑な現象を単純化し、様々な組合せ論的な記述を可能にしたことである。例えば、申請者らは様々な結晶基底の実現-Young tableaux とその一般化, 完全結晶を用いた path 表示, 多面体表示など-を与えた。近年、この結晶基底に新しい方向からのアプローチが模索されている。それが研究課題の目的の1つである幾何結晶の理論である。これは、代数多様体上に作用する群から誘導される作用を定義し結晶基底と類似の構造を多様体上に構成するもので、熱帯化/超離散化とよばれる操作によりある種の結晶基底と対応することが知られており、これは近年発展したトロピカル幾何の理念と適合するものである。申請者は Schubert 多様体、冪単群上に幾何結晶の構造が入ることを明らかにした。また最近、ある種の完全結晶の極限と熱帯化/超離散化により対応する幾何結晶の構成および、そのいくつかの幾何結晶上に \mathbf{R} 写像を構成することができた。また、 sl_2 の場合のみであるがトロピカル \mathbf{R} 写像の普遍的構成にも成功した。幾何結晶上の有理関数系でいくつかの良い性質をもつイプシロン系とよばれるものを A 型の場合のみであるが得られている。これは、トロピカル \mathbf{R} 写像の普遍的構成に関連があると期待される。

2. 研究の目的

本研究の目的は、幾何結晶上のトロピカル \mathbf{R} 写像を普遍的な方法で構成することである。そのために、必要と考えられるイプシロン系の特徴付けを行いたい。さらに、affine 旗多様体に代表される無限次元幾何結晶の構成とソリトン系との関連について、考察することである。

3. 研究の方法

イプシロン系を A 型以外でも構成し、既知の tropical \mathbf{R} 写像との関連を調べる。特に、その特徴付けについて様々な分野からの手法について試みる。また、幾何結晶の多面体表示的な構成や cluster 代数などとの関連について実験的な考察を行っていきたい。

4. 研究成果

幾何結晶上のトロピカル \mathbf{R} 写像と関係が深い、飾り付き幾何結晶について考察を行い A, B, C, D, G 型の場合に、幾何結晶の単項式表示との関係についていくつかの結果を得た。特に、飾り付き幾何結晶の飾り関数が、一般化された小行列式の表示を経由して結晶基

底の単項式表示の正係数の和の形で表示されたことは、飾り関数を仲立ちとして結晶基底の単項式表示と多面体表示の間にも興味深い関係が存在し、その結果は新しいものとなっている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 18 件)

2014 以降

1. T. Nakashima, Decorations on Geometric Crystals and Monomial Realizations of Crystal Bases for Classical Groups, Journal of Algebra, Vol. 399, 1, Feb. (2014), 712-769. (査読有)
2. T. Nakashima, Decorated Geometric Crystals and Polyhedral Realizations of type D_n , Contemporary Mathematics, Vol. 623 (2014), 227-242. (査読有)
3. T. Tsuzuki, Spectral means of central values of automorphic L-functions for $GL(2)$, Memoire of AMS. 235(2015), no. 1110, 1. (査読有)

2013

4. T. Nakashima and M. Shimojo, RSK-type correspondence of Pictures and Littlewood-Richardson Crystals, Tokyo Journal of Mathematics, Vol. 36, (2013), 113-130. (査読有)
5. K. C. Misra and T. Nakashima, $A_n^{(1)}$ -Geometric Crystal corresponding to Dynkin index $i = 2$ and its ultra-discretization, Symmetries, Integrable Systems and Representations, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 40 (2013), 297-318. (査読有)
6. T. Nakashima, Decorated Geometric Crystals, Polyhedral and Monomial Realizations of Crystal Bases, Contemporary Mathematics Vol. 602 (2013), 143-163. (査読有)

2012

7. M. Igarashi, K. C. Misra and T. Nakashima, Ultra-discretization of the $D_4^{(3)}$ -Geometric Crystals to the $G_2^{(1)}$ -Perfect Crystals, Pacific Journal of Mathematics Vol.255, No.1, (2012), 117-142. (査読有)
8. Yasushi Gomi, Taiki Maeda, Ken-ichi Shinoda, Gauss sums on finite groups. Tokyo J. Math. 35, no.1 (2012), 165-179. (査読有)
9. T. Tsuzuki, Spectral average of central values of automorphic L -functions for holomorphic cusp forms on $SO(m, 2)$ I, J. Number Theory 132 (2012), 2407-2454 (査読有)

2011

10. M. Igarashi and T. Nakashima, Geometric Crystals on Flag varieties and Unipotent Subgroups of Classical Groups, Journal of Geometry and Physics, Vol.61, Issue 11, November (2011), 2267-2284. (査読有)
11. T. Nakashima and M. Shimojo, Pictures and Littlewood-Richardson Crystals, Tokyo Journal of Mathematics **34** (2011), 493-506. (査読有)
12. T. Nakashima and M. Shimojo, Admissible Pictures and Littlewood-Richardson Crystals, Comm. in Algebra **39** no 10, (2011), 3849-3865. (査読有)
13. T. Tsuzuki, Limit formulas of period integrals for a certain symmetric pair II, J. Math. Soc Japan 63 (2011), 1039-1084 (査読有)

2010

14. T. Nakashima, Ultra-discretization of the $G_2^{(1)}$ -Geometric Crystals to the $D_4^{(3)}$ -Perfect Crystals, Representation theory of algebraic groups and quantum groups, Progr. Math., Birkhauser/Spring, 284, (2010), 273-296. (査読有)

15. M. Kashiwara, T. Nakashima and M. Okado, Tropical R maps and Affine Geometric Crystals, Representation Theory **14** (2010), 446-509. (査読有)
16. M. Igarashi and T. Nakashima, Affine Geometric Crystal of type $D_4^{(3)}$, Contemporary Mathematics **506**, (2010), 215-226. (査読有)
17. T. Nakashima, Epsilon Systems on Geometric Crystals of type A_n , SIGMA **6** (2010), 023. (査読有)
18. Mana Igarashi and T. Nakashima, Affine Geometric Crystal of type $D_4^{(3)}$, Contemporary Mathematics, **506**, (2010), 215-226. (査読有)

[学会発表] (計 9 件)

2014

1. (招待講演) T. Nakashima, Crystal Bases and Upper Cluster Algebras on Double Bruhat Cells, Conference on Cluster Algebras and Representation Theory CMC Thematic Program on Cluster Algebras in Mathematics and Physics KIAS, Seoul, Korea (Nov. 11, 2014).
2. (招待講演) T. Nakashima, Upper Cluster Algebras on Double Bruhat Cells and Monomial Realizations of Crystal Bases, ICM satellite Conference on Representation Theory and Related Topics, COEX, Daegu, Korea (Aug. 8, 2014).
3. (招待講演) T. Nakashima, Cluster Variables on Double Bruhat cells and Monomial Realizations of Crystal Bases, New Directions in Lie Theory, Combinatorial Representation Theory, CRM, Montreal, Canada (April 23, 2014).

2012

4. (招待講演) T. Nakashima, "Elementary characters and monomial realizations of

crystal bases”, Algebraic and Combinatorial approaches to representation, Department of Mathematics, University of California Riverside, USA, May 18-20, 2012.

5. (招待講演) T. Nakashima, “Monomial realizations of crystal bases and elementary characters”, The XXIX International Colloquium on Group-Theoretic Methods in Physics, Chern Institute of Mathematics, Nankai University, China, Aug. 23, 2012.

6. (招待講演) T. Nakashima, “Decorated Geometric Crystals and Monomial Realizations of Crystals”, American Mathematical Society Fall Southeastern Section Meeting, Special Session on Geometric and Algebraic Aspects of Representation Theory, Tulane University, New Orleans, USA. Oct. 13, 2012.

2011

7. (招待講演) T. Nakashima, “Decorated Geometric Crystals, Elementary Characters and Monomial Realizations of Crystal Bases”, Symmetries, Integrable Systems and Representations, Universite Lyon1, France, Dec. 13-16, 2011.

2010

8. (招待講演) T. Nakashima, “Geometric and Unipotent Bicrystals and Polyhedral Realization of Crystal bases”, ICM Satellite Conference, Algebraic and Combinatorial Approaches to Representation Theory, National Institute of Advanced Studies, Bangalore, India, August 12-16, 2010.

9. (招待講演) T. Nakashima, “Decorated Geometric Crystals, Monomial Realizations

and Polyhedral Realizations of Crystal Bases”, GCOE Conference: Algebraic and geometric aspects of discrete integrable systems - integrable systems and cluster algebras, 東京大学大学院数理学研究科002号室, Dec. 14-17, 2010.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]
○出願状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中島 俊樹 (NAKASHIMA, Toshiki)
上智大学理工学部教授
研究者番号：60243193

(2) 研究分担者

都築 正男 (TSUZUKI, Masao)
上智大学理工学部准教授
研究者番号：80296946

五味 靖 (GOMI, Yasushi)
上智大学理工学部准教授
研究者番号：50276515

(3) 連携研究者

()

研究者番号：

