

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 15 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540038

研究課題名（和文）特殊関数の幾何学的研究

研究課題名（英文）Geometric study of special functions

研究代表者

松本 圭司（MATSUMOTO KEIJI）

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：30229546

研究成果の概要（和文）：多変数超幾何関数・微分方程式系に関する公式を構成した。(1) 積分表示に関する局所係数（コ）ホモロジー群に定義される交点形式を利用して、モノドロミー表現やパップ形式を表現空間の基底の取り方に依存しない形で与えた。(2) 代数多様体の周期積分とみなせるような特殊なパラメーターを有する超幾何関数に対して、保型形式と超幾何級数との恒等式を与えた。(3) 多種の多項間平均たちの反復により定まる極限を多変数超幾何関数により表示した。

研究成果の概要（英文）：We construct several formulas for hypergeometric functions and systems of differential equations of multi-variables. (1) By using the intersection forms defined between twisted (co)homology groups, we give monodromy representations and connection matrices of Pfaffians for some of them. (2) For hypergeometric functions with special parameters related to periods of algebraic varieties, we give some identities between automorphic forms and hypergeometric functions. (3) Some limits defined by the iteration of several means of several terms are expressed by hypergeometric functions of multi-variables.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
2012 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：超幾何関数，テータ関数，算術幾何平均，局所係数（コ）ホモロジー群

1. 研究開始当初の背景

(1) 3次曲面族に関する周期写像の構成を複素射影直線の7点で分岐する6重被覆に関する Prym 多様体を考察することで具体的に与えた。その逆写像を4次元複素超球の5次ジークル上半空間への埋め込みとテータ関数を用いて表示した。その結果、4次元複

素超球上のレベル $(1-\omega)$ 合同群に関する保型形式環の構造が解明された。

複素射影直線の8点で分岐する巡回4重被覆に関する周期写像をその曲線の Prym 多様体を考察することで具体的に与えた。その逆写像を5次元複素超球の6次ジークル上半空間への埋め込みとテータ関数を用いて表

示した。その結果、5次元複素超球上のレベル(1+i)合同群に関する保型形式環の構造が解明された。

(2) Whitehead Link や Borromean Rings の補空間には双曲構造が入ることが知られている。実3次元上半空間の $I_{2,2}$ 型領域 D への埋め込みと D 上のテータ関数を用いて、それらの双曲構造を考察した。これらの Link 補空間のユークリッド空間への埋め込みを与え、Link のもつ対称性とテータ関数の変換公式との対応が与えられた。

(3) 多変数超幾何関数に対する変数変換公式をいくつか与えた。その応用として4種類の4項平均を繰り返して行なうことで得られる共通極限を3変数超幾何関数で表示した。

2. 研究の目的

楕円関数、超幾何関数、テータ関数、ゼータ関数、等の特殊関数は、Euler, Gauss, Jacobi, Abel, Weierstrass, Riemann たちにより研究され、さまざまな公式が得られている。よく知られている楕円関数の加法公式は、楕円曲線上に定義される加法の表現と解釈されて、平面3次元曲線上の幾何学的な加法と対応している。このきれいな対応は、多変数化されたテータ関数の加法公式やアーベル多様体の理論へと発展している。

この研究では、代数多様体のモジュライ空間、射影空間内の超平面配置空間、双曲構造をもつ結び目や絡み目、特殊関数の積分表示から得られる局所係数(コ)ホモロジー群、等の幾何学的な対象の構造を調べ、それらのみならず性質を関係する特殊関数についての公式として翻訳すること、また逆に特殊関数についての公式とこれらの幾何学的な対象との対応を与え、その構造を解明することを研究目的とする。特殊関数の研究と幾何学的対象物の構造研究を並行することで相乗効果による理論発展を期待するものである。

以下で研究期間内に何をどこまで明らかにするのか、本研究の学術的な特色・独創的な点および予想される結果と意義について、具体的な研究項目をいくつか挙げて説明する。

(1) 代数多様体のモジュライ空間の研究

3次元曲面族に対する周期写像の構成は、D. Allcock, J.A. Carlson, D. Toledo により、3次元射影空間の3次元曲面で分岐する巡回3重被覆で得られる3次元多様体の Intermediate Jacobi 多様体の考察で与えられた。研究代表者と連携研究者寺杣友秀教授との共同研究でその Intermediate Jacobi 多様体がある代数曲線の Prym 多様体として構成されることが示された。高次元多様体の

Intermediate Jacobi 多様体を代数曲線の Prym 多様体で具体的に表現しようという試みは画期的であり、そのような例が3次元曲面族以外でも構成されれば高次元多様体のモジュライ空間理論の発展に大きく寄与するものと考えられる。

(2) 射影空間内の超平面配置空間

研究代表者は、いくつかの射影空間内の超平面配置空間を一般化された超幾何関数を用いて対称空間に実現し、その逆対応をテータ関数を用いて表示している。その対応を与えている超幾何関数とテータ関数間の厳密な関係式を与えることを目指す。この研究は楕円曲線の Jacobi 公式や超楕円曲線に対する Thomae 定理の拡張に相当する。

(3) 双曲構造を有する結び目絡み目の研究

研究代表者と連携研究者吉田正章教授は、実3次元上半空間を複素4次元対称空間に埋め込み、その埋め込みによるテータ関数の引き戻して実解析的な関数を多数構成した。これらの関数による一般の双曲構造を有する結び目や絡み目への研究が展開されれば、保型形式のなす次元付環の構造から3次元多様体の不変量の研究へと進展することが期待できる。

(4) 算術幾何平均の研究

研究代表者と連携研究者志賀弘典教授は、多項間の平均反復による共通極限を多変数超幾何関数により表現した。これらは Gauss によって与えられた算術幾何平均の超幾何級数による表示定理の拡張にあたり、200年の時を経て得られた結果である。さらなる表示定理を発見することを目指す。また、算術幾何平均の収束がとても速いことが、円周率 π の数値計算に応用されている。得られた表示定理の数値計算への応用を計る。

3. 研究の方法

研究代表者と4名の連携研究者とは密接な研究連携を行なった。また、この研究に関する最新の情報を収集した。計算機の環境整備を行ない、巨大な計算を実行した。

(1) 研究代表者と連携研究者寺杣教授で研究期間を通して「玉原特殊多様体セミナー」を群馬県沼田市にある東大玉原国際セミナーハウスにて合宿形式で開催した。参加者間に活発な研究交流があり、大きな研究の進展をもたらした。連携研究者吉田教授とは、研究期間を通して、頻繁に研究連絡を実行した。

(2) 研究期間を通して、年始に神戸大学で「超幾何研究集会」が開催されたので、参加して超幾何関数・微分方程式の専門家たちと

研究交流を行った。平成22年度には、研究代表者はドイツにある数学研究所 Max Planck Institute for Mathematics に出向き、この研究所の D.B. Zagier 教授やその他の研究員とセミナーや意見交換会を行ない、この研究に関係する最新の情報を収集した。

(3) メモリー増強デスクトップパソコンと記憶容量がテラバイト級のハードディスクを購入した。数式処理システム Maple をインストールし、各種ソフトウェアを設定し、巨大な計算ができる環境を整備した。連携研究者と情報交換を行なうためのノートパソコンを購入し、ある程度の計算が可能となるような環境を整備した。

4. 研究成果

(1) Appell や Lauricella により拡張された多変数の超幾何微分方程式系には、解の積分表示があることが知られている。その積分表示に対して、局所係数のホモロジー群とコホモロジー群が定義される。また、局所係数 (コ) ホモロジー群は、それぞれの双対空間となる局所係数 (コ) ホモロジー群が存在していて、双対性を定める交点形式が存在している。研究代表者は、多変数超幾何微分方程式系を局所係数 (コ) ホモロジー群の交点形式を用いて研究した。

① 解の線積分表示のある Appell F₁ や Lauricella の F_D に対して、モノドロミー群の生成系を交点形式により基底の取り方によらない表現で与えた。その結果を利用して、解空間の基底を与えた場合の行列の導出法や具体的な行列表示も与えた。また、この微分方程式系のパップ形式については、ベクトル値未知関数の設定のやり方によらない表現をねじれコホモロジー群の交点形式を用いて与えた。そして、未知関数を具体的に設定をした場合の接続行列を与えた。これらの結果をまとめた論文は Kyushu Journal of Mathematics に掲載予定となっている。

② Lauricella の F_A と呼ばれる m 変数 rank 2^m の超幾何微分方程式系に対して、Singular locus を決定し、モノドロミー群の生成系を与えた。解の積分表示から定まる局所係数ホモロジー群の交点形式と Singular locus へ変数が近づく際に退化する局所係数サイクルの決定により生成系が定まるというモノドロミー交点数原理を発見している。その結果として表現空間の次元が 2^m と大きくなるものに対しても、交点形式に関する鏡映としてモノドロミー行列を具体的に表示することが可能となった。ここで得られた定理や原理を用いれば、超幾何微分方程式系 F_B のモノドロミー群の生成系が得

られる。これらの結果をまとめた論文は Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie V に掲載予定となっている。

③ 解の積分表示に2次式が現れる2変数超幾何微分方程式系 Appell F₄ に対して、局所係数 (コ) ホモロジー群の基底を与えて、それらの基底に対する交点行列たちを具体的に求めた。Appell が与えた4つの級数解に対応する局所係数サイクルを具体的に構成し、局所係数 (コ) ホモロジー群間にあるペアリングたちの整合性から導かれるねじれ周期関係式を具体的に与えた。また、モノドロミー群の生成系を交点形式を用いて解空間の基底の取り方によらない表現で与え、表現が有効となるパラメーターについての条件を緩和した。これらの結果をまとめた論文は、現在投稿中となっている。

(2) 代数多様体の周期積分とみなせるような特殊なパラメーターを有する超幾何関数に対して、保型形式と超幾何級数との恒等式を与えた。

① 射影平面の6本直線で分岐する2重被覆から $K3$ 曲面族が得られる。この族は周期積分の比をとることにより、4次元の I_{22} 型対称領域 D と解析的に同型である。6本直線の配置を表す変数 x と対称領域 D の変数 τ が周期積分で関係づけられているとき、 x を変数とする超幾何級数と τ を変数とするテータ関数の間に成立する等式を与えた。これは、楕円曲線族に対する Jacobi の公式、超楕円曲線族に対する Thomae の公式の $K3$ 曲面族版である。この結果は Journal für die Reine und Angewandte Mathematik から出版された。

② Picard によって研究された複素射影直線の5点で分岐する3次巡回被覆で得られる代数曲線族は、周期積分の比を考えることで3次 Siegel 上半空間に埋め込まれた2次元複素超球 B と解析的に同型である。5点の配置を表す変数 x と2次元超球 B の変数 τ が周期積分で関係づけられているとき、 x を変数とする超幾何級数と τ を変数とするテータ関数の間に成立する等式を与えた。この結果は Journal of the Mathematical Society of Japan から出版された。

③ 楕円曲線族の Hesse の標準形に対する周期積分とレベル3の主合同群に対する保型形式間に成立する等式を与えた。これは、楕円曲線族に対する Jacobi の公式の Hesse の標準形版であり、Acta Mathematica Vietnamica から出版された。

(3) 多種の多項間平均たちの反復により定まる極限を多変数超幾何関数により表示した。

① R. Vidunus により発見された超幾何関数の関数等式を利用して、新しい平均反復を定めその極限を Gauss の超幾何級数を用いて表示した。この表示には複素平面に作用する三角群 $(3, 3, 3)$ が深く関係しており、平均反復の極限公式と 1 の三乗根 ω を周期とする楕円曲線の加法との関係解明により、多種の多項間平均たちの反復定理への可能性をもつものである。また、これまでの平均反復では、初項を正数で与えていたが、初項たちの比の偏角の絶対値が $\pi/3$ より小さい複素数で与えても、いくつかの極限表示定理が有効であることを示した。これらの結果は Hokkaido Mathematical Journal から出版された。

② 超楕円曲線族に対する Thomae の公式を用いて、初項がある条件を満たす場合に 2^m 項の 2^m 平均たちの反復による極限を超楕円曲線の周期行列の行列式で表示した。さらにこれが m 次元射影空間の $2m$ 超平面で分岐する 2 重被覆で得られる Calabi-Yau varieties の周期積分で表示できることを示した。この結果は International Journal of Mathematics から出版されている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

① Keiji Matsumoto,
Monodromy and Pfaffian of Lauricella's F_D in terms of the intersection forms of twisted (co)homology groups,
Kyushu Journal of Mathematics, 査読有, 掲載決定.

② Keiji Matsumoto and Masaaki Yoshida,
Monodromy of Lauricella's hypergeometric F_A -system,
Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie V, 査読有, 掲載決定.

③ Keiji Matsumoto and Tomohide Terasoma,
Thomae type formula for $K3$ surfaces given by double covers of the projective plane branching along six lines,
Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 査読有, 669 (2012), 121-149.

④ Keiji Matsumoto and Takashi Oikawa,
Limits of iterations of complex maps and hypergeometric functions,
Hokkaido Mathematical Journal, 査読有, 41 (2012), 135-155.

⑤ Keiji Matsumoto Takeshi Sasaki and Masaaki Yoshida,
Monodromy of the hypergeometric differential equation of type $(3, 6)$ III,
Kumamoto Journal of Mathematics, 査読有, 23 (2010), 37-47.

⑥ Keiji Matsumoto and Tomohide Terasoma,
Arithmetic-geometric means for hyperelliptic curves and Calabi-Yau varieties,
International Journal of Mathematics, 査読有, 21 (2010), 939-949.

⑦ Keiji Matsumoto
A transformation formula for Appell's hypergeometric function F_1 and common limits of triple sequences by mean iterations,
The Tohoku Mathematical Journal. Second Series, 査読有, 62 (2010), 263-268.

⑧ Keiji Matsumoto and Shinya Yamazaki and Tomohide Terasoma,
Jacobi's formula for Hesse cubic curves,
Acta Mathematica Vietnamica, 査読有, 35 (2010), 91-105.

⑨ Keiji Matsumoto and Hironori Shiga,
A variant of Jacobi type formula for Picard curves,
Journal of the Mathematical Society of Japan, 査読有, 62 (2010), 305-319.

[学会発表] (計 6 件)

① 松本圭司,
交点形式からの Appell's F_4 の考察,
琉球超幾何セミナー, 2012. 11. 21, 琉球大学理学部

② 松本圭司,
Advances in the theory of Appell-Lauricella's Hypergeometric functions after their works,
第 6 回玉原特殊多様体研究集会,
2012. 09. 03,
東京大学玉原国際セミナーハウス.

③ Keiji Matsumoto,
Thomae type formulas for cyclic triple branched coverings of the complex projective line,
Workshop on hypergeometric functions and related topics, 2012. 06. 30, 東京大学玉原国際セミナーハウス.

④ 松本圭司,
モノドロミー群とパップ形式の交点形式による表現,
超幾何方程式研究会 2012, 2012.01.06, 神戸大学 理学部.

⑤ 松本圭司,
超幾何関数 F_D のモノドロミー群とパップ形式,
第 5 回 玉原特殊多様体研究集会,
2011.09.05,
東京大学玉原国際セミナーハウス.

⑥ 松本圭司,
Lauricella's F_A のモノドロミー群,
超幾何方程式研究会 2011, 2011.01.05, 神戸大学 理学部.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松本 圭司 (MATSUMOTO KEIJI)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：30229546

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

寺杣 友秀 (TERASOMA TOMOHIDE)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：50192654

志賀 弘典 (SHIGA HIRONORI)
千葉大学・大学院理学研究科・名誉教授
(H22, 23 早稲田大学・大学院理工学研究科・客員教授)
研究者番号：90009605

吉田 正章 (YOSHIDA MASAOKI)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：30030787

小原 功任 (OHARA KATSUYOSHI)
金沢大学・数物科学系・准教授
研究者番号：00313635