様　式　C－19、F－19、Z－19　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ８ 日現在

機関番号：１２６１２
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2014
課題番号：２２５４００４３

研究課題名（和文）有理的連結多様体とその上のベクトル束の射影幾何学的視点と圏論的視点からの研究

研究課題名（英文）Research on rationally connected varieties and vector bundles on them from projective-geometric and categorical points of view

研究代表者

大野　真裕（Ohno, Masahiro）

電気通信大学・情報理工学（系）研究科・准教授

研究者番号：７０２７７８２０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：非特異射影多様体の有界導来圏は完備な強い意味での例外列を持つとき，ある有限次元代数の有界導来圏に完全同値であることがBondalによって示されている．本研究ではこの結果からあるスペクトル系列を導いた．さらに完備な強い意味での例外ベクトル束列を導来圏がもつとき，完備な強い意味での例外ベクトル束列による連接層の局所自由分解を与えた．Peternell-Surek-Wisniewskiは端射線の理論を用いてネフなベクトル束の分類を射影空間上で第１チャーン類が２以下の時と非特異２次超曲面上で第１チャーン類が１以下の時に与えていたが，本研究では上記の局所自由分解のみに基づいてこの分類の別証明を与えた．

研究成果の概要（英文）：A. Bondal shows that if the bounded derived category of coherent sheaves on a smooth projective variety admits a full strong exceptional sequence then it is exact equivalent to the bounded derived category of modules over some finite dimensional algebra. We deduced a spectral sequence from this theorem of Bondal. We also gave a resolution of a coherent sheaf in terms of a full strong exceptional sequence of vector bundles if the derived category admits such a sequence of vector bundles. As an application, we obtained a new proof of the classification due to Peternell-Surek-Wisniewski of nef vector bundles on projective spaces with the first Chern class less than three and on smooth hyperquadrics with the first Chern class less than two. Our proof is based only on this resolution and some cohomological study of nef vector bundles, whereas the original proof due to Peternell-Surek-Wisniewski is based on the theory of extremal rays and analysis of the corresponding contraction morphisms.

研究分野：代数幾何学

キーワード：ベクトル束　例外列　局所自由分解　スペクトル系列　導来圏　射影多様体　ネフ

1．研究開始当初の背景

A. Kuznetsov は，論文「Homological Projective Duality」(Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 105 (2007), 157-220)において，「ホモロジカル射影双対(Homological Projective Duality)」なる概念を導入し，その後，3 次元 Fano 多様体の導来圏についても調べていた．ホモロジカル射影双対は，N 次元射影空間 P^N 内の非特異射影多様体 $X \subset P^N$ の（連接層のなすアーベル圏の有界）導来圏 D(X)の Lefschetz 分解と呼ばれるある型の半直交分解と，ホモロジカル射影双対多様体(Homologically projectively dual variety)と呼ばれる（一般には非可換で存在も特別な場合にしかわかっていない）多様体 $Y \to (P^N)\check{}$ の導来圏 D(Y)の双対 Lefschetz 分解と呼ばれるある型の半直交分解との間の対応で（ここで$(P^N)\check{}$は射影空間 P^N の双対射影空間を表す)， X の線形切断の導来圏の半直交分解と，Y の対応する線形切断の導来圏の半直交分解とのある種の対応を誘導するもののことである．X の超平面切断の場合にもう少詳しく言うと，X の超平面 $H \subset P^N$ による切断 $X \cap H$ の導来圏 $D(X \cap H)$のある型の半直交分解とホモロジカル射影双対多様体 $Y \to (P^N)\check{}$ の $H \in (P^N)\check{}$ 上のファイバーY_H の導来圏 $D(Y_H)$のある型の半直交分解との間の関係を与えるものである．(Y_Hが特異点をもつような $H \in (P^N)\check{}$ 全体の集合が，ちょうどXの古典的な双対多様体$X\check{} \subset (P^N)\check{}$，つまり，X と接する P^N 内の超平面全体の集合となるので，Y はホモロジカル射影双対多様体と名付けられた．）また，Kuznetsov は，X が曲線のとき，非自明な Lefschetz 分解が存在すれば，$X \subset P^N$ は射影直線の Veronese 埋め込みになることも示していた．このことから，$X \subset P^N$ の導来圏 D(X)が非自明な Lefschetz 分解をもつということと，$X \subset P^N$ が(射影空間などの)有理的多様体を射影空間に埋め込んだものとしての構造をもつということとの間の何らかの関係が予想される．

一方，射影幾何学的に著しい特徴をもつ代数多様体は，しばしば，有理的連結多様体としての構造，ないしは，有理的連結多様体の族で覆われるという構造をもつ．例えば，次のような場合がある．$X \subset P^N$ を射影空間 P^N 内の n 次元非特異射影多様体で，超平面に含まれていないものとし，$SecX \subset P^N$ を X の割線多様体，つまり，X のすべての割線の和集合の閉包とする．一般に SecX の次元は N と 2n+1 の最小値以下となるが，SecX の次元が N と 2n+1 の最小値より真に小さいとき，SecX は退化しているという．SecX が退化していて，そのガウス写像による像の次元がとりうる最大の値をとるとき，X の一般的な 2 点は 2 次曲線で結ぶことができて，有理的連結多様体になる．また，非特異射影多様体 $X \subset P^N$の古典的な双対多様体$X\check{} \subset (P^N)\check{}$の次元は，一般に N-1 以下であるが，N-1 より真に小さいとき，双対多様体 $X\check{}$は退化しているという．双対多様体 $X\check{}$が退化しているとき，H を双対多様体 $X\check{}$の一般の点とすると， X と H の接触部分(contact locus)，つまり，(P^N 内に埋め込まれた)接空間 T_xX が H に含まれる点 x 全体の集合は X 内の線形部分空間（射影空間）になる．よって，とくに X は有理直線で覆われるという性質をもつ．

退化した双対多様体 $X\check{} \subset (P^N)\check{}$をもつような非特異射影多様体 $X \subset P^N$ の研究においては，$X \subset P^N$ の法ベクトル束の性質の解明が重要な役割を果たす．ここで，法ベクトル束は豊富なベクトル束である．さらに，森理論の登場以来，射影多様体 X とその上の豊富なベクトル束 E の組(X,E)を，その随伴束 K_X+detE のネフ性との関連で調べるということがしばしば行われてきた．

以上述べたように，有理的連結多様体，および，その上のベクトル束は，（森理論との関係からの研究に加えて，）従来から，射影幾何学的あるいは偏極多様体論的研究においても，よく現れ，活発に研究されている対象であったが，新たに，ホモロジカル射影双対という現象（の可能性）が見いだされ，圏論的視点という，新たな視点からの研究が見いだされつつあった．そして，このことは，近年，代数多様体の導来圏が，いろいろな分野との関連から新たな注目を集め，研究されてきているという状況とも合致していた．

2．研究の目的

上記の背景を踏まえ，本研究の目的は，有理的連結多様体とその上のベクトル束を，先に挙げた Kuznetsov の導来圏に関する研究や射影幾何学（偏極多様体論）との関連を視野に入れて，研究することとした．

3．研究の方法

研究分担者の寺川宏之氏とは，ほぼ毎週セミナーを行っていたので，それを続けることとした．また，圏論的手法では，しばしば，代数的トポロジーに由来する手法が持ち込まれるので，代数的トポロジーの専門家の山口耕平氏に研究分担者に加わっていただいた．射影幾何学的研究における具体例の計算において計算機を使いたいと考えていたので，木田雅成氏に研究分担者に加わっていただいた．そして，大野自身は，主に，以下にあげる項目に対する理解と洞察を深めることを通して，研究をおこなうことにし，適宜，研究分担者と協力して，研究をすすめることとした．

(1) 半直交分解

導来圏の半直交分解の例として，完備な強い意味での例外列に付随する半直交分解がある．完備な強い意味での例外列があると，Bondal の定理より，非特異射影多様体 X の有界導来圏 D(X)は，ある有限次元代数 A 上の有限生成右加群のつくるアーベル圏の有界導来圏 D(A)と三角圏として同値となる．この対応により，D(X)と D(A)の間を行き来す

ることにより，従来には認識されていなかった手法・結果が得られないか？を考えることにした．また，等質多様体上の導来圏の Lefschetz 分解と代数群の表現論についても考察することにした．

(2) 安定性条件

半直交分解と似た事柄に，t 構造がある．これを更に精密化した概念が Bridgeland により安定性条件として見出されていた．これについても考察することにした．

(3) Fourier-向井変換

Kuznetsov のホモロジカル射影双対でも Fourier-向井変換は現れ，また，ベクトル束の何らかのモジュライにおいても Fourier-向井核は重要と思われたので，寺川氏とともに考察することにした．

(4) DG 圏

Kuznetsov のホモロジカル射影双対では，線形切断の次元が期待次元になっている場合しか扱われていない．これを線形切断の次元が期待次元になっていない場合も扱えるようにしようとすると，DG 圏で扱うのが適切と思われていた．また，必ずしも強い意味ではない例外列を扱う必要もある．こうしたことから，DG 圏についても知見を深めていくことにした．

(5) 豊富なベクトル束

豊富なベクトル束についてはその随伴束のネフ性の観点からの分類が行われていたが，これに付随した種々の問題についても考察することにした．

(6) 非有界導来圏

Grothendieck duality の Brown 表現可能性定理を使った証明のように，無限直和を許した非常に大きな圏，非有界導来圏で考えることが有効な場合がある．さらに，多様体に何らかの特異点を許す場合等のことも考えて，非有界導来圏に関する事柄についても知見を深めていくこととした．

４．研究成果

(1) あるスペクトル系列の導出

X を非特異射影多様体とし，D(X)を X 上の連接層のなすアーベル圏の有界導来圏とする．そして D(X)は完備な強い意味での例外列をもつとする．その例外列の直和対象を G とし，G の自己同型環を A，A 上の有限生成右加群のなすアーベル圏の有界導来圏を D(A)とする．このとき，Bondal の定理より，RHom(G,・)という D(X)から D(A)への三角関手(または完全関手ともいう)によって，D(X)と D(A)は三角圏として同値となる．この準逆(quasi-inverse)関手は，A 上右から G を左導来テンソルするという関手である．特に，連接層 F に対し，RHom(G,F)に A 上右から G を左導来テンソルすると，F と同型となる．大野と寺川は共同で，導来圏に関する研究，および，箙の道代数やその表現について学び，その帰結として，RHom(G,F)に A 上右から G を左導来テンソルしたものと F が同型になるという事実を E_2 項から始まるスペクトル系列の言葉で書き直した．

(2) (1)のスペクトル系列と Beilinson スペクトル系列の具体例での比較

Peternell-Szurek-Wiśniewski は，論文「Numerically effective vector bundles with small Chern classes」において，ある具体的なコホモロジーの条件のみが与えられたベクトル束を，よくわかっているベクトル束の間の射の商として表すということを，Beilinson スペクトル系列を用いて行っている．大野と寺川は，同じ条件をみたすベクトル束を，(1)のスペクトル系列を用いて，より簡単なベクトル束の間の射の商として表した．そして，(1)のスペクトル系列と Beilinson のスペクトル系列との違いを明示した．Beilinson のスペクトル系列を使った場合よりも，わかりやすい記述が得られたのではないかと思う．

(3) 斉次１次式を成分とする行列の最大次数の小行列式に関するある性質の証明

伊東裕也氏と野間淳氏との共同研究により，大野は次の結果を得た．「P を代数閉体 K 上の n 変数斉次１次式を成分とする行列とし，P の小行列式の次数の最大値を m とする．このとき，K 上のベクトル空間 K^n のゼロを除く各点での P の階数が m ならば，P の m 次小行列式全体の集合は，K 上の n 変数 m 次斉次式全体のなすベクトル空間を生成する．」証明には，Eagon-Northcott 複体を使う．また，この命題は，K が代数閉体でないと成り立たない．

(4) 連続写像全体のなす空間をホモトピー型の観点から代数的写像のなす空間で近似する問題（Atiyah-Jones-Segal 型予想）

実射影空間 M（射影空間の実点全体の集合）から複素非特異コンパクトトーリック多様体 N への連続写像全体のなす無限次元空間 Map(M,N)を，ホモトピー型の観点から，M から N への代数的写像（複素数体上の有理写像のうち，その不確定点が実点集合上にないもの）全体のなす空間によって近似する問題において，山口と大野は，Kozlowski 氏との共同研究により，近似次元を具体的に評価することに成功した．

(5) 完備な強い意味での例外ベクトル束列による連接層の局所自由分解

X を非特異射影多様体とし，D(X)を X 上の連接層のなすアーベル圏の有界導来圏とする．そして，D(X)は完備な強い意味での例外列をもち，かつ，その例外列をベクトル束の列ととれるものとする．G_0，G_1，・・・，G_m を一つのそのようなベクトル束列とする．G を G_0，G_1，・・・，G_m の直和とし，G の自己同型環を A とする．X 上の任意の連接層 F に対し，セールの消滅定理より，d を十分大きくとると，任意の整数 q＞0 に対し，$\mathrm{Ext}^q(G, F(d))=0$ となることに注意する．このとき，F は，$G_0(-d)$，$G_1(-d)$，・・・，$G_m(-d)$という，完備な強い意味での例外ベクトル束列によ

る局所自由分解をもつことを大野は示した．この局所自由分解は，右 A 加群 Hom(G, F(d))の射影分解に対応するものである．D(X)が完備な強い意味での例外ベクトル束列をもつような非特異多様体の例としては，射影空間，非特異２次超曲面，グラスマン多様体などがある．

(6) 射影空間上の第１チャーン類が２以下のネフなベクトル束の分類，および，非特異２次超曲面上の第１チャーン類が１以下のネフなベクトル束の分類の別証明

Peternell-Szurek-Wiśniewski は，論文「Numerically effective vector bundles with small Chern classes」において，射影空間上の第１チャーン類が２以下のネフなベクトル束，および，非特異２次超曲面上の第１チャーン類が１以下のネフなベクトル束の分類を，端射線の理論を用いて，与えている．(5)で与えた局所自由分解の応用として，大野は，この分類の，端射線の理論によらない，別証明を与えた．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　７件）

(1) Andrzej Kozlowski, Masahiro Ohno and Kohhei Yamaguchi,
Spaces of algebraic maps from real projective spaces to toric varieties,
Journal of Mathematical Society of Japan 掲載決定，査読有

(2) Hiroya Ito, Atsushi Noma and Masahiro Ohno,
Maximal minors of a matrix with linear form entries,
Linear and Multilinear Algebra
掲載決定，査読有,
DOI:10.1080/03081087.2014.959516

(3) Masahiro Ohno and Hiroyuki Terakawa,
A spectral sequence and nef vector bundles of the first Chern class two on hyperquadrics,
Annali dell' Università di Ferrara,
Vol 60, 397-406, (2014), 査読有,
DOI:10.1007./s11565-013-0188-6

(4) Andrzej Kozlowski and Kohhei Yamaguchi,
Simplicial resolutions and spaces of algebraic maps between real projective spaces,
Topology and its Applications, Vol 160, 87-98, (2013), 査読有,
DOI:10.1016/jtopol.2012.09.019

(5) Andrzej Kozlowski and Kohhei Yamaguchi,
Spaces of equivariant algebraic maps from real projective spaces into complex projective spaces,
RIMS Kokyuroku Bessatsu, Vol 39, 51-61, (2013), 査読有

その他，査読無のもの２件

〔学会発表〕（計　６件）

(1) 大野真裕，強い意味での完備な例外ベクトル束による連接層の局所自由分解とその応用，研究集会「射影多様体の幾何とその周辺 2014」，2014 年 11 月 1 日，高知大学理学部（高知県・高知市）

(2) Masahiro Ohno and Hiroyuki Terakawa, A spectral sequence and nef vector bundles of the first Chern class two on hyperquadrics, International Congress of Mathematics Short Communications, 2014 年 8 月 16 日, Seoul(Korea)

(3) 大野　真裕, A spectral sequence and nef vector bundles of the first Chern class two on hyperquadrics, 代数幾何ミニ研究集会, 2014 年 3 月 5 日, 埼玉大学（埼玉県・さいたま市）

(4) 山口　耕平, Spaces of maps to toric varieties, 岡山大学理学部数学教室談話会，2013 年 2 月 13 日，岡山大学理学部（岡山県・岡山市）

(5) 大野　真裕，寺川　宏之，A spectral sequence and nef vector bundles with small Chern classes on hyperquadrics, 第 109 回 7 階セミナー, 2012 年 12 月 21 日，早稲田大学教育学部（東京都・新宿区）

(6) 大野　真裕, t 構造つき三角圏での tilting について，数理科学セミナー（高知大学理学部理学科数学コース），2010 年 9 月 14 日, 高知大学理学部(高知県・高知市)

６．研究組織

(1)研究代表者
大野　真裕（Masahiro Ohno）
電気通信大学・大学院情報理工学研究科・准教授
研究者番号：70277820

(2)研究分担者
寺川　宏之（Hiroyuki Terakawa）
都留文科大学・文学部・教授
研究者番号：80277863

山口　耕平（Kohhei Yamaguchi）
電気通信大学・大学院情報理工学研究科・教授
研究者番号：00175655

木田　雅成（Masanari Kida）
電気通信大学・大学院情報理工学研究科・教授（平成 22~24 年度の研究分担者）
研究者番号：20272057

(3)連携研究者　なし