

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 6月 5日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010 ～ 2012

課題番号：22540046

研究課題名（和文）

同変層を用いた不変式論

研究課題名（英文）

Invariant theory which uses equivariant sheaves

研究代表者

橋本 光靖 (HASHIMOTO MITSUYASU)

名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：10208465

研究成果の概要（和文）：正標数の体上の簡約群 G の多項式環 S への線型な作用について、もし S が G の表現とし良いフィルター付けを持てば、 G のパラボリック部分群 P のユニポテント根基 U_P による不変式環 S^{U_P} は有限生成 UFD で強 F 正則、特に Gorenstein であることを証明した他、正標数の可換環の性質を論じたり、宮崎充弘氏との共同研究で G 素イデアル、 G 準素 G イデアルを論じる等の研究を行った。これらは代数学における可換環論、不変式論の研究となる。

研究成果の概要（英文）：Let G be a reductive group over a field of positive characteristic, acting on a polynomial ring S linearly. We proved that if S has a good filtration as a representation of G , then for any parabolic subgroup P of G , the invariant subring S^{U_P} under the action of the unipotent radical U_P of P is a finitely generated strongly F -regular UFD, in particular, it is Gorenstein. We also discussed properties of commutative rings of positive characteristic, and jointly with Mitsuhiro Miyazaki, we discussed G -prime and G -primary G -ideals. These are studies in commutative algebra and invariant theory.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2012年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：代数学

キーワード：可換環論、不変式論

1. 研究開始当初の背景

S がスキーム、 G が平坦かつ有限型の S 群スキーム、 X がネーターな G の作用する S スキームとするとき、Mumford は G -linearized O_X -module を定義した。これは G の X への作用を調べる上で基本的な存在であると考えられるが、その圏を調べることは定義だけからでは難しく、系統だっ

深く調べられるということはこれまでなかった。そこで研究代表者・橋本は G -linearized O_X -modules の圏と同値な圏を G の X への作用から得られる亜群（一種のスキームの図式）の上の同変層の圏として捉え、それをすべての加群の層の圏に埋め込むことにより、Hom、テンサー積、順像、逆像、それらの導来関手、捻れ逆像を導入し、その基本的と思われる性質を論じ、それが意味通

常のスキームの上の層論の素直な一般化になっていることを示した。これらを踏まえて、大溪正浩と共同で、局所コホモロジーの同変版を定義し、その性質を論じた。その発展として、Matlis 双対性、Grothendieck の局所双対性の同変版を与えた。

これらは非常に基礎的な研究であるが、すでにいくつかの応用があった。たとえば、渡辺敬一氏による不変式環が Gorenstein になるための十分条件に関する定理を有限群スキームに関する定理に拡張した。また、大溪氏と共同で、線型簡約群スキームの作用によるアフィンな幾何学的商による Cohen—Macaulay 性の商への伝播を示している。

2. 研究の目的

研究の目的は、同変層を用いることによって不変式論における新しい成果を挙げることであった。具体的目標として、次を掲げていた。

(1) 完備局所環の同変版に相当するものを考え、Matlis 双対性の同変版をネーター加群とアルティン加群の対応に相当するものに一般化する。

(2) k を正標数の代数的閉体、 G を k 上の簡約群、 U を G の Borel 部分群のユニポテント根基、 V を有限 G 加群とし、 $S = \text{Sym } V$ は S . Donkin の意味で良いフィルター付けを持つと仮定する。このとき、 S^*U は強 F 正則であろうと予想されるので、この予想を解決する。

(3) G イデアルに各種操作を施して、 G イデアルになるかを調べる。とくに密着閉包についてこの問題を解決する。

3. 研究の方法

研究協力者の大溪正浩を加え、5名で研究した。計算機環境の整備等、一部備品消耗品としても用いたが、大半は旅費として用いた。

国内においては、可換環論シンポジウム、可換環論セミナー、代数幾何学シンポジウム、代数学シンポジウム等の研究集会参加の費用として用いたが、日本大学における特異点セミナー参加等も行った。

平成 23 年 11 月には第 33 回可換環論シンポジウムを浜松市で行い、G. Kemper 氏を招聘して講演してもらうなど、不変式論の要素をとり入れ、また、広く講演を募って講演者を集め、本研究に関する情報交換の場とした。

海外出張としては平成 22 年にミシガン大学（米国）における正標数の可換環論と表現論に関する集会に参加した。平成 23 年にはクイニオン大学（ベトナム）における可換代数の研究集会に参加した。

4. 研究成果

(1) Matlis 双対性、局所双対性の同変版に関する大溪氏との研究内容をまとめて印刷公表した（雑誌論文⑩）。これらを可能にしたのは局所環論における剰余体の入射包絡の同変版を見つけることであり、これは同変双対化複体の（唯一の 0 ではない）局所コホモロジー加群として実現された。良く知られている次数付き環に関する局所双対性がこの枠組みで捉えられることも示している。このことは下記(4)で応用されている。

(2) 正標数の特異点の性質のうち、Frobenius 準同型を介して定義される、強 F 正則性、 F 純性、Cohen-Macaulay F -injective 性について、Matijevic-Roberts 型定理を証明した。関連してこれらの性質の base change と軌跡の開性の問題を研究した。また、 F 純性を Radu-André 準同型を用いて準同型の性質として定義し、その基本性質を論じた。また、強 F 正則性の強いバージョンである大変強い F 正則性を定義し、これがいつ強い F 正則性と一致するかを論じた。結果として、環が局所環である場合、 F 有限である場合、エクセレント局所環上本質的に有限型である場合には一致するという結論を得た。また、 F 有限性の無い状況において、強 F 正則性が F 純 base change することを証明した。これらの研究成果は雑誌論文⑨として公表された。

(3) 研究目的欄 (2) の問題を肯定的に解決するとともに、 U として、任意のパラボリック部分群 P のユニポテント根基でも同様の結論が得られることを示した。応用として、籠の表現全体へのさまざまな群作用から得られる不変式環について、その強 F 正則性が導かれた。特別な場合として、後藤・早坂・藏野・中村によって調べられたある種の不変式環が F 正則にもなっていることを示せた。また、可換環上の簡約群の表現について、その対称多元環が良いフィルター付けを持つ軌跡は開集合であることを示し、対称多元環が良いフィルター付けを持つ、という条件は「一般的な」条件であることを証明した。これらの成果は雑誌論文⑤と

②として公表された。⑤においては、部分的な結果として、 P がボレル部分群の場合に、 S^*U が F 純であることを証明した。⑤の結果を利用して、②では一般の場合を証明している。②における証明の過程で、いくつかの副産物が得られている。まず、 P がボレル部分群のとき、不変式環 $k[G]^U$ は (有限生成で) 強 F 正則である。この結果の系として、 U が同じときに、 A が G 代数で、 A^*U が有限生成かつ F 正則であれば、 A が有限生成 F 有理であることが示された。主結果は P がボレル部分群の場合にまず証明されるが、 M が良いフィルター付けを持つ G 加群であれば、 M^*U は P に対応した Levi 部分群の表現としても良いフィルター付けを持つ、という S. Donkin の表現論における結果を活用して一般の場合の証明が完了する。

- (4) 大溪氏との共同研究による局所双対性の変換版の応用として、トーラスの作用を考えることにより、因子類群が有限生成自由アーベル群であるような体上の射影的正規代数多様体 X の Cox 環 $Cox(X)$ について、それがネーター環になる場合にその正準加群の生成元の次数を決定した。この研究は蔵野和彦氏と代表者橋本の共同研究であり、成果は雑誌論文④として公表された。主結果の証明においては、環の次元の局所コホモロジー加群の Matlis dual として定義される次数つき正準加群を、トーラスの作用に関する同変双対化複体の消えない最初のコホモロジー群と見直して、同変捻れ逆像に関する結果を利用できるように翻訳する過程が重要である。
- (5) ネーター環の上のイデアルが準素分解をもつことは有名であるが、もう少し一般に、ネータースキームの上の連接イデアルの層は準素分解を持つ。これらの理論の変換版を構成した。その萌芽としては、トーラスの作用 (次数付き環上の次数付き加群) に関して、鴨井祐二氏が H 素イデアル、 H 準素イデアルを定義したことが挙げられる。これを一般化して、ネータースキーム S 上有限型の平坦群スキーム G の作用について、 G 準素イデアル、 G 素イデアルの概念を定義した。 G 素イデアルの可能な定義としては、全体ではない G イデアル P であって、 I, J が G イデアルで、積 IJ が P に含まれるならば、 I か J のいずれかが P に含まれるもの、というものと、ある素イデアル Q について、 P は Q に含まれる最大の G イデアルになっている、というも

のと 2通りが考えられるが、実は両者は一致していることがわかった。準素イデアルの一般化についても同様である。このようにして G 素イデアル、 G 準素イデアルを定義すると、最短 G 準素分解の存在と、随伴 G 素因子の一意性がいえる。 G がトーラスのように連結かつ順滑なファイバーを持つような場合だと、随伴 G 素因子と随伴素因子の概念は一致し、随伴素因子は G イデアルになることがわかる。これは良く知られた次数付き環に関する事実の一般化になっている。また、体上有限生成環や有理整数環 Z 上有限生成環の一般化として、Ratliff 環を定義した。可換環 A が Ratliff であるとは、 A がネーター環で、強鎖状で、Hilbert 環で、任意の A の極小素因子 P に対して、 A/P の任意の飽和素イデアル鎖の長さが一定であることをいう。体は Ratliff である。素イデアルを無限個持つ 1 次元ネーター整域は Ratliff である。われわれは、Ratliff 環の上に有限生成な環は Ratliff であることを示した。準コンパクトで、各点が Ratliff 環の素スペクトラムであるような開近傍を持つようなスキームを Ratliff スキームとして定義する。Ratliff スキームは体上有限型であるようなスキームに似た性質を持つ。たとえば、 Y が等次元の Ratliff スキームで U が空でない Y の開部分スキームであれば、 $\dim U = \dim Y$ である。また、 U は Y の閉点を含む。 S, G が上のとおりで、Ratliff スキーム X に作用し、 X の G 極小素因子がただひとつのとき、 X が等次元であることが証明できた。特に X が G -primary ならば等次元である。一方、 X が Ratliff という条件を外すと、 X が G -primary であっても等次元でない例が得られた。また、ある G イデアルの準素成分になっている準素イデアル q であって、 q^* の準素成分ではない例を構成した。ここに q^* は q に含まれる最大の G イデアルである。また、 m が極大イデアルであっても、 m^* は G 極大イデアルとは限らない。また、いわゆる Matijevic-Roberts 型の定理について、統一的な取り扱いを可能にし、いくつかの F 特異点についても利用可能な形にした。これは (2) の研究においてさらに調べられている。以上は宮崎充弘氏と代表者橋本の共同研究であって、雑誌論文①において公表されている。

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

① M. Hashimoto, M. Miyazaki, G-prime and G-primary G-ideals on G-schemes, *Comm. Algebra* **41** (2013), 2254–2296. 査読あり

② M. Hashimoto, Good filtrations and strong F -regularity of the ring of U_P -invariants, *J. Algebra* **370** (2012), 198–220. 査読あり

③ K.-i. Watanabe, K.-i. Yoshida, A variant of Wang's theorem, *J. Algebra* **369** (2012), 129–145. 査読あり

④ M. Hashimoto, K. Kurano, The canonical module of a Cox ring, *Kyoto J. Math.* **51** (2011), 855–874. 査読あり

⑤ M. Hashimoto, Good filtrations and F -purity of invariant subrings, *J. Math. Soc. Japan* **63** (2011), 815–818. 査読あり

⑥ G. Rinaldo, N. Terai, K.-i. Yoshida, Cohen–Macaulayness for symbolic power ideals of edge ideals, *J. Algebra* **347** (2011), 1–22. 査読あり

⑦ G. Rinaldo, N. Terai, K.-i. Yoshida, On the second powers of Stanley–Reisner ideals, *J. Commut. Algebra* **3** (2011), 405–430. 査読あり

⑧ K. Kimura, N. Terai, K.-i. Yoshida, Schmitt–Vogel type lemma for reductions, *Arch. Math.* **96** (2011), 535–545. 査読あり

⑨ M. Hashimoto, F -pure homomorphisms, strong F -regularity, and F -injectivity, *Comm. Algebra* **38** (2010), 4569–4596. 査読あり

⑩ M. Hashimoto, M. Ohtani, Equivariant Matlis and the local duality, *J. Algebra* **324** (2010), 1447–1470. 査読あり

⑪ M. Crupi, G. Rinaldo, N. Terai, K.-i. Yoshida, Effective Cowsik–Nori theorem for edge ideals, *Comm. Algebra* **38** (2010), 3347–3357. 査読あり

⑫ K. Matsuda, M. Ohtani, K.-i. Yoshida, Diagonal F -thresholds on binomial hypersurfaces, *Comm. Algebra* **38** (2010), 2992–3013. 査読あり

[学会発表] (計 7 件)

① M. Hashimoto, Good filtrations and the strong F -regularity of the ring of U_P -invariants, Frobenius splitting in algebraic geometry, commutative algebra, and representation theory (2010 年 5 月 17 日 ~ 22 日), ミシガン大学 (米国), 2010 年 5 月 22 日.

② 橋本光靖, Purity of algebra maps and invariant theory, 第 6 回アフィン代数幾何学研究集会 (2010 年 9 月 2 日 ~ 5 日), 関西学院大学 (大阪市), 2010 年 9 月 4 日.

③ Mitsuyasu Hashimoto, Equivariant total ring of fractions and factoriality of rings generated by semiinvariants, 第 32 回可換環論シンポジウム/The 6th Japan-Vietnam joint seminar on commutative algebra (2010 年 12 月 11 日 ~ 16 日), 三浦郡葉山町, 2010 年 12 月 14 日.

④ 橋本光靖, 簡約群の作用と商の構成, 可換環論ミニセミナー 2011 (2011 年 3 月 7 日 ~ 8 日), 浜松市, 2010 年 3 月 7 日.

⑤ Mitsuyasu Hashimoto, Almost principal fiber bundles, The 7th Japan-Vietnam joint seminar on commutative algebra (2011 年 12 月 12 日 ~ 16 日), クイニョン (ベトナム), 2011 年 12 月 15 日.

⑥ 橋本光靖, 同変層とそれを用いた不変式論, 第 57 回代数学シンポジウム (2012 年 8 月 20 日 ~ 23 日), 京大数理研, 2012 年 8 月 21 日.

⑦ Mitsuyasu Hashimoto, Almost principal fiber bundles, 第 34 回可換環論シンポジウム (2012 年 11 月 22 日 ~ 26 日), 葉山町, 2012 年 11 月 23 日.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称 :

発明者 :

権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

橋本 光靖 (HASHIMOTO MITSUYASU)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・
准教授
研究者番号：10208465

(2) 研究分担者

吉田 健一 (YOSHIDA KEN-ICHI)
日本大学・文理学部・教授
研究者番号：80240802
(H22～H23のみ。H24は連携研究者)

(3) 連携研究者

宮崎 充弘 (MIYAZAKI MITSUHIRO)
京都教育大学・教育学部・准教授
研究者番号：90219767
藏野 和彦 (KURANO KAZUHIKO)
明治大学・理工学部・教授
研究者番号：90205188