様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年５月２７日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2010 ～ 2012
課題番号：22540055
研究課題名（和文） 正標数の射影代数幾何

研究課題名（英文） Projective Algebraic Geometry in Positive Characteristic

研究代表者
梶 元 (KAJI HAJIME)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：70194727

研究成果の概要（和文）：
ガウス写像の微分の階数が恒等的に零となる射影埋込みをもつ非特異射影多様体，ガウス写像の一般ファイバーの線形性，および，接的退化曲線の線型退化性についていくつかの研究成果を得た．また，「都の西北 代数幾何学シンポジウム」を開催した．

研究成果の概要（英文）：
I obtained a few results on non-singular projective varieties with Gauss map of rank zero, on the linearity of Gauss fibres, and on the linear degeneration of tangentially degenerate curves. I also organized a symposium “Miyako no Seihoku Algebraic Geometry Symposium.”

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
2011 年度	600,000	180,000	780,000
2012 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	2,300,000	690,000	2,990,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：ガウス写像，射影双対，再帰性，正標数．

１．研究開始当初の背景

(1) 射影多様体に対する再帰性とガウス写像の分離性の関係.

S. Kleiman-R. Piene (1993) により「再帰的ならばガウス写像が分離的となる」ことが知られている．その逆の真偽については，2001 年，研究代表者により双有理的ガウス写像をもつ非再帰的射影多様体が発見され，否定的に解決された．その後さらに，連携研究者である深澤 知氏（山形大学）と研究代表者の研究により，dimX ≤ 2 の場合は逆も成り立ち，dimX ≥ 3 の場合については，任意次元・任意標数における反例が与えられている．さらに最近の研究により，正標数の

任意の代数多様体はガウス写像が双有理的となる非再帰的射影モデルをもつことが証明されている.
(2) ガウス写像により引き起こされる関数体の拡大.
端緒は Kleiman による問題提起「ガウス写像 γ による関数体の拡大 $K(C)/K(\gamma(C))$ の分離次数が 1 とならない非特異射影曲線 C を見つけよ. または, 分離次数が 1 となることを証明せよ」(S. Kleiman, "Intersection theory and enumerative geometry: A decade in review," Proc. Symposia Pure Math. 46-2 (1987), pp. 321-370.) であろう. これに対しては, 研究代表者は, 有理曲線と楕円曲線に対してガウス写像により現れる関数体の拡大をすべて決定し, 有理曲線ではどんな非分離拡大も現れること, 楕円曲線については超特異的か否かによる大きな差異 のあることを示した. また, 種数 2 以上の場合は常にガウス写像は分離次数 1 となることを示した. さらに高次元の場合, Kleiman-Piene, および, 野間淳氏や研究代表者による研究がある. ただし, ガウス写像が分離次数 1 となる十分条件を与えるか, または, 非自明な分離次数をもつ例を構成するに 留まっているのが現状である.

２. 研究の目的
一般の代数閉体上の射影代数幾何において, 正標数特有の現象を研究することを目標とする. 特に, 射影多様体の双対多様体とガウス写像に焦点を当て, 多様体が次元 1 ないし埋め込まれた射影空間における余次元が 1 の場合に知られていた結果を, 高次元化・高余次元化することを目的とする. 具体的には以下の問題を考える.
(1) 射影多様体に対する再帰性とガウス写像の分離性の関係.
双有理的ガウス写像をもつ非再帰的射影埋込みを許す非特異射影多様体の分類を行いたい. 再帰性とガウス写像の双有理性という, 既存の研究とは異なる新しい視点・切り口からの正標数の射影多様体の分類が可能ではないかと期待される.
(2) ガウス写像により引き起こされる関数体の拡大.
与えられた代数多様体 X に対して, その射影埋め込みに応じて現れるガウス写像 γ による関数体の拡大 $K(X)/K(\gamma(X))$ の決定を目指したい. 研究期間内においては, まず X がアーベル多様体の場合に的を絞る. 一方, この問題の別の攻め方として, ガウス写像が非分離的となる射影埋込みをもつ代数多様体の分類を目指す.

３. 研究の方法
(1) ガウス写像が非分離的となる射影埋込みをもつ射影多様体の分類を目指す. 解決に向けて, 射影多様体に特異点を許した場合と非特異の場合に分けて考える.
① 射影多様体に特異点を許す場合: 問題「与えられた代数関数体の非分離的有限次拡大 L/K に対して, L の射影モデル X で, $L = K(X)$ において $K = K(\gamma(X))$ となるものが存在するか?」を考えたい. 代数関数体の次元 (すなわち, 基礎体上での超越次数) が 1 の場合には, 研究代表者の従来の研究により肯定的であることが示されている. $\dim K \geq 2$ の場合について部分解は得ている: すなわち, L/K が純非分離的でさらに $L \supseteq K \supseteq L^p$ の場合には求める射影モデルが存在することが, 連携研究者に挙げた深澤 知氏 (山形大学) と研究代表者の共同研究により解っている ($p > 0$ は基礎体の標数である). 残るは, 高い非分離次数や非自明な分離次数をガウス写像により如何に実現するかである. 引き続き深澤氏との共同研究を行う計画である. 深澤氏の協力をあおぎ, Singular などの計算代数システムを使った計算実験を行うことにより解決の糸口を見出したい. そのためには深澤氏との研究打合せが不可欠である.
② 非特異射影多様体の場合: ガウス写像の (微分の) 階数が零となる射影埋込みをもつ (非特異) 射影多様体 X について, 現在, 連携研究者である深澤氏および古川勝久氏 (早稲田大学) との共同研究が進行中である. これは, X が非特異の場合は, 上記「2. 研究の目的」欄の問題 (1) 「双有理的ガウス写像をもつ非再帰的射影埋込みを許す代数多様体の分類」への部分的解も与えることになる. というのは, 深澤氏と研究代表者の共同研究により, ガウス写像の階数が零となる射影埋込みをもつ射影多様体はガウス写像が双有理的な非再帰的射影埋込みをもつことが示されているからである.
ガウス写像の階数が零となる射影埋込みをもつための判定法として, 射影多様体上の有理曲線を用いた比較的使いやすいものが得られており, それを基に, 基本的な射影多様体の場合ついて研究が進んでいる. そして, 代数多様体上の有理曲線の幾何への応用も見出されている. し

かし，たとえば射影空間 P^N 内の 3 次超曲面について，N = 3，4 の場合に未解決な部分が残っている．N ≥ 5 次元以上の場合の射影幾何的議論を見直しさらに突き詰めて改良してゆけば，その場合も解決できると思われるが，そのためには深澤氏，古川氏との 数学的議論・研究打合せが不可欠である．また，正標数のファノ多様体の場合については，解っていないことが多い．これについては，正標数のファノ多様体についてみずから勉強することも大事であるが，正標数代数幾何の専門家たちとのセミナーや議論により，研究は大きく前進すると期待される．

(2)上記「2. 研究の目的」欄の問題 (2) 「アーベル多様体 X の射影埋め込みに応じて現れる関数体の拡大 K(X)/K(γ(X)) の決定」を目指す．まずはその準備を行いたい．具体的には，アーベル多様体上のベクトル束とフロベニウス写像の性質について知識を習得し，既存の研究で不足する部分については独自の研究を深めたい．まずはアーベル曲面の場合から始める．楕円曲線の場合の手法がある程度は，アーベル曲面に対してもそのまま適用できると思われる．アーベル曲面の場合に研究が進み，その様子が分かったらそれを足がかりに一般次元のアーベル多様体の場合について取り組む計画である．

４．研究成果

(1) ガウス写像の微分の階数が恒等的に零となる射影埋込みをもつ非特異射影多様体.

ガウス写像の微分の階数が恒等的に零となる射影埋込みをもつかどうか，セグレ多様体（射影空間の直積），グラスマン多様体，そして，低い 次数の超曲面の場合に明らかにした．また，正標数の射影多様体において，自由有理曲線が存在しても，標数零の場合と異なり必ずしも，極小自由有理曲線が存在するとは限らないことを示す例を発見した．その成果は論文にまとめ発表した(「５．主な発表論文等」〔雑誌論文〕②)．口頭では、2010 年 7 月に Instituto de Matematica Pura e Aplicada（リオデジャネイロ、ブラジル）で開催された研究集会「ALGA-2012 (the 12th Meeting of the Brazilian Group in Commutative Algebra and Algebraic Geometry)」で招待講演発表を行った（「５. 主な発表論文等」〔学会発表〕④)．また､2010 年9月にソウル国立大学（ソウル、韓国）の代数学セミナーに招待され講演発表を行った．その後、連携研究者である古川勝久氏（早稲田大学）と共同研究を続行した．古川氏の大きな寄与により、未解決であった次元の低い３次超曲面の場合について明らかにすることができた．特に、問題とする射影多様体のブローアップとの関係の研究において大きな進展があった．この成果は古川氏の単著論文として発表した（「５．主な発表論文等」〔雑誌論文〕①)．

(2) ガウス写像の一般ファイバーの線形性.

「分離的ガウス写像の一般ファイバーは線形となるか？」という未解決問題に取り組んだ(標数零の場合に肯定的であることは 1970 年代から知られている）．度重なる議論の結果，この問題は連携研究者である古川氏のアイディアにより肯定的に解決された．古川氏はこの問題解決で得たアイディアをさらに発展させせつつある．その内容は古川氏の単著論文としてまとめつつある．

(3) 接的退化曲線の線型退化性.

これは上記(2)から派生した成果である．正標数の基礎体上で，ガウス写像の一般ファイバーが線型とはならない最初の例は， J. Rathmann (Math. Ann. 276 (1987)) と楫 (J. London Math. Soc. (2) 33 (1986)) により独立に与えられた．後者の論文の主題，つまり接的退化曲線の線型退化性（接線に関する trisecant lemma）について，射影曲線の特異点に関する条件を緩めることができ，若干ではあるが一般化することができた．そこまでの研究成果については, 2012 年 2 月に釜山（韓国）で開催された研究集会「Symposium on Projective Algebraic Varieties and Moduli」, 2012 年 3 月に九州大学で開催された研究集会「高次元代数多様体とベクトル束の代数幾何学」，および, 2012 年 8 月に Instituto de Matematica Pura e Aplicada（リオデジャネイロ、ブラジル）で開催された研究集会「ALGA-2012 (the 12th Meeting of the Brazilian Group in Commutative Algebra and Algebraic Geometry)」において招待講演を行った（「５．主な発表論文等」〔学会発表〕③②①)．現在，特異点に関する条件を完全に外せるかどうか研究中である．

(4) 研究集会開催.

桂 利行氏（法政大学）からの援助を受けて，早稲田大学理工学部において 2010 年 11 月 10 日から 13 日までの 4 日間，「都の西北 代数幾何学シンポジウム」を開催した．そこでは，海外からの招待した数学者 2 名を含む 15 名の数学者が講演発表を行った．これは研究課題に関連する分野の情報収集に大いに役

立った．またこのシンポジウムを通じて多くの数学者と研究課題に関して研究打ち合せをすることができ，非常に有意義であった．シンポジウムの模様は報告集として冊子にまとめ，日本全国の主だった大学・数学教室に郵送した.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① K.Furukawa, Cubic hypersurfaces admitting an embedding with Gauss map of rank 0, Advances in Mathematics 査読有 230 (2012) 1174-1183.
② S.Fukasawa, K.Furukawa, H.Kaji, Projective varieties admitting an embedding with Gauss map of rank zero (with S. Fukasawa, K. Furukawa), *Advances in Mathematics* 査読有 224 (2010), 2645-2661.

〔学会発表〕（計４件）

① 梶 元, A tangential trisecant lemma, 2012年8月16日, 研究集会,「ALGA-2012 (the 12th Meeting of the Brazilian Group in Commutative Algebra and Algebraic Geometry)」, Instituto de Matematica Pura e Aplicada（リオデジャネイロ, ブラジル).
② 梶 元, A tangential trisecant lemma, 2012年3月16日, 研究集会「高次元代数多様体とベクトル束の代数幾何学」, 九州大学.
③ 梶 元, A tangential trisecant lemma, 2012年2月13日, 研究集会「Symposium on Projective Algebraic Varieties and Moduli」, Novotel Ambassador（釜山, 韓国).
④ 梶 元, Gauss maps in positive characteristic, 2010年7月9日, 研究集会,「ALGA-2010 (the 10th Meeting of the Brazilian Group in Commutative Algebra and Algebraic Geometry)」, Instituto de Matematica Pura e Aplicada（リオデジャネイロ, ブラジル).

〔その他〕

ホームページ等

http://pc193097.pc.waseda.ac.jp/

６．研究組織
(1)研究代表者

梶 元（KAJI HAJIME）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：70194727

(2)連携研究者

深澤 知（FUKASAWA SATORU）
山形大学・理学部・准教授
研究者番号：20569496

古川 勝久（FURUKAWA KATSUHISA）
早稲田大学・理工学術院・助教
研究者番号：40648664