様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年　6　月　10　日現在

機関番号：34416
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2012
課題番号：22540057
研究課題名（和文）組合せ論的可換代数への導来圏や位相幾何学的手法の応用
研究課題名（英文）The applications of derived categories and topological methods to combinatorial commutative algebra

研究代表者
柳川　浩二（ YANAGAWA KOHJI ）
関西大学・システム理工学部・准教授
研究者番号：40283006

研究成果の概要（和文）： Nagel と Reiner の結果を発展させ, Borel fixed ideal の 非標準的 polarization を研究し，その極小自由分解を構成した(岡崎亮太氏との共著)。この自由分解は，正則な CW 複体を台とするが，この現象は Welker らが構築した枠組内で，離散モース理論を用いて「解釈」できる。

また，半正規なアファイン半群環や toric face ring の双対化複体も研究した。Bruns, Nguyen らの結果を，導来圏を用いて見直し，改良している。

研究成果の概要（英文）：Developing a result of Nagel and Reiner, the author and R. Okazaki studied the non-standard polarization of a Borel fixed ideal, and gave its minimal free resolution. This resolution is supported by a regular CW complex, which can be "interpreted" by the discrete Morse theory in the framework constructed by Welker et al.

The author also studied the dualizing complexes of seminormal affine semigroup rings and toric face rings. In this work, the preceding results of Bruns et al and Nguyes are re-formulated and improved using derived categories.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
2012 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総　計	2,300,000	690,000	2,990,000

研究分野： 数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード： 組合せ論的可換代数, Borel fixed ideal, 極小自由分解, 双対化複体, アファイン半群環

１．研究開始当初の背景

代表者は十数年前，**組合せ論的可換代数**の研究に**導来圏**や**構成可能層**を応用する手法を開発した。これは当該分野の進展に一定の寄与をしたと自負しているが，この方向での研究は，比較的早い時期に ある種の完成に達した為，2005～2008 年頃は次の展開の模索を強いられることとなった。

一時は，組合せ論に背景を持たない一般の可換環に手を広げることも試みたが，満足な結果は得られなかった。しかし，その過程で，導来圏や位相幾何学的手法を，従来とは少し違った角度から，組合せ論的可換代数に応用するという方向性に気づき，これが軌道に乗り始めた時期に，本研究は開始された。

課題名にもある「導来圏」については，代表者のこれまでの研究の流れに直接沿ったものであり，双対化複体の具体的な記述やその応用を当面の目標とした。ただし，扱う環として，Stanley-Reisner 環や正規アファイン半群環といった従来からのものではなく，**simplicial poset の face ring** や **toric face ring** など，比較的最近になって定義され，新たな可能性が期待できるものを選んだ。

「位相幾何学的手法」としては，上述の simplicial poset の face ring とも関連するトーラス多様体の同変ホモロジーを一例として想定したが，これに固執するものではなく，他に有望なものが見付かれば，柔軟に対応するつもりであった。

２．研究の目的

一般に，導来圏を用いる利点として， 加群レベルで見ると煩雑になる現象を，洗練された形で理解できることが挙げられる。導来圏まで視点を上げて，初めて見えてくる現象も多い。Stanley-Reisner 環や正規アファイン半群環などの組合せ論的可換代数の最も基本的な対象については，既に導来圏を用いた研究を行ってきているが，今回は適用範囲を広げること，それにより，従来からの対象に関しても理解を深めること，を目指した。

位相幾何学との関連では，具体的な題材としては，当初の想定とは異なり，**離散モース理論**との関連に関して，大きな進展があった。この理論は，位相幾何学において近年注目されている著名なものである。こうして研究の視野を広げ，より幅広い分野にアピールする結果を得ていくことも，大きな目的であった。

３．研究の方法

数学という分野の一般的傾向として， 研究内容と研究方法は表裏一体である。さらに，本研究は分担者が居ないことも有り，内容面でここに特記することは無いかと思われる。ただし，研究を実際に進めていくに当たり，関連する話題の研究者との意見交換は積極的に行った。論文を幾つか共同執筆した岡崎亮太氏(2011・2012 年度は大阪大学大学院特任助教)とは特に緊密に連絡を取ったのは当然として，今回の研究では，ベルゲン大学(ノルウェー)の G. Fløystad 氏およびカタルーニャ工科大学(スペイン)の J. Alvarez Montaner 氏を訪問し，意見交換を行ったことが，決定的に重要であった。

４．研究成果

まず，位相幾何学的手法に関連する(下記「雑誌論文」欄の番号付での)①～③から解説する。ただし，位相幾何学との関連が表面化するのは，執筆順で 3 つ目の論文である①からである。

多項式環 S の単項式イデアル I に対し，変数の数が多い多項式環 T の<u>被約な</u>単項式イデアル J が次の条件を満たすとき，J は I の polarization であるという。

(i) 一次の二項式からなる T の正則列 Θ が存在し，$T/\Theta \cong S$ であり，さらに，この同型を通して $J/\Theta = I$。

(ii) 上の Θ は，T/J の正則列でもある。

具体例で説明すると，S の単項式 x^2y^2z に T の単項式 $x_1x_2y_1y_2z_1$ を対応させる流儀で，任意の単項式イデアルの polarization が得られる。これを pol(I)と記し，**標準的 polarization** と呼ぶ(そもそも，最近まで，polarization と言えば，標準的なものしか考えられていなかった)。polarization は常套的に使われる手法・トリックではあるが，基本的には，単なる技巧と思われていた

③では，標準的 polarization を加群の操作に拡張し，関手として考察した。ただし これは，既知の諸結果を代表者独自の視点から纏め，適宜改良したものであり，続く研究への「助走」という意味合いが強い。

③を執筆中の 2010 年，代表者と同様に，導来圏の組合せ論的可換代数への応用を研究し，また，polarization の一般化を独自に模索していた G. Fløystad 氏を訪ねた。そこで，非標準的な polarization について教えられたことが，大きな転機となった。

多くの単項式イデアルは，複数の非標準的 polarizaztion を持つが，特に興味深いのは，Fløystad や彼の学生の Lohne が **box polarization** と呼ぶものである。具体例で説明すると，x^2y^2z に $x_1x_2y_3y_4z_5$ を対応させる流儀で得られるイデアル b-pol(I) である。これは全ての単項式イデアルに対して機能す

るわけではないが，Nagel と Reiner の 2009 年の論文で，生成元の次数が揃った Borel fixed ideal に対しては，実際に polarization となることが示されていた（ただし, 研究動機が異なる為，余り明示的には述べられていない）。

②において 代表者は，任意の Borel fixed ideal I に対し，b-pol(I) は polarization となることを示した。証明は Nagel−Reiner のアプローチとは異なり，b-pol(I) に付随する単体的複体が，（non-pure） shellable であることを示した後，環論的な議論を用いる。

なお，Borel fixed ideal（厳密には，0-Borel fixded ideal または strongly stable monomial ideal と言うべきだが）は，標数 0 の体上の多項式環の斉次イデアルの generic initial ideal として現れるもので，計算可換代数・組合せ論的可換代数において極めて重要である。Borel fixed ideal I に対し，その「被約化」 I^σ も構成され，こちらも有用であるが，b-pol(I) を経由することで，両者を統一的に扱うことが可能となった(従来は，両者の類似性は幾分場当たり的に証明されていた)。

続いて，①において，岡崎と共同で，Borel fixed ideal I に対し，b-pol(I) の極小自由分解を構成した。 I 自身の極小自由分解は，20 年以上前に Eliahou と Kervaire によって構成されており，当該分野の極めて重要な結果の一つである。しかし，この自由分解は，b-pol(I) には持ち上がらない。一方，Nagel と Reiner は，生成元の次数が揃っているという仮定のもとで，b-pol(I) の極小自由分解を構成していたが，生成元に関する仮定を外すことは当初は困難だった。代表者らの極小自由分解は，Nagel-Reiner のものの拡張であるが,「言葉遣い」は, Eliahou-Kervaire (以下，EK と略す)のものに準じており，**EK type resolution** または **modified EK resolution** と呼んでいる。なお，b-pol(I) の極小自由分解を, I 自身や I^σ の極小自由分解に「落とす」ことは容易である。
この結果には思わぬ副産物もあった。これについては，背景の説明が必要であろう。

1990 年代後半，Bayer と Sturmfels は，幾つかの単項式イデアルやトーリック・イデアルの自由分解が，CW 複体に付随する構造を持つことを示した。自由分解の基底の取り方に依存する話であり，やや人工的なきらいは有るが，具体例の面白さから，大いに注目された。CW 複体に付随する単項式イデアルの自由分解として最も簡単なものは，**Taylor 分解**であり，生成元が r 個の場合，$r-1$ 単体に付随する。これは，任意の単項式イデアルに対して有効であり，極めて簡明だが，殆どの場合，極小からは程遠い。極小自由分解に CW 複体が付随してこそ面白いと言える。

位相幾何学で近年注目されている 「離散モース理論」は，与えられた有限 CW 複体 χ に対し，これとホモトピー同値だが，より胞体の数が少ない CW 複体 χ_A の存在を，組合せ論的なデータ A から保証するものである。一方，単項式イデアルの極小自由分解を構成するとき，(単体に対応する)Taylor 分解から出発し，これを小さくする・・という方針が当然考えられ，実際に多くの試みが行われてきた。この二者の類似性を指摘し，後者を前者の視点から「解釈」し，厳密に定式化したのが，Batzies と Welker の仕事である。標語的に言えば， 簡明だが無駄の多い Taylor 分解を、離散モース理論で「潰して」，極小(に近い)自由分解を作ろう、というものである。

ただし，彼らの方法は「考え方の提示」という面が強く，実のある具体例に適用しようとすると，計算量が膨大で，手に負えなかった。Borel fixed ideal も，重要な具体例として，彼らの論文で扱われているが 特殊な場合を除いて，はっきりしたことは分からなかった。b-pol(I) は一見複雑だが，二重添え字である為に，かえって制御し易く，計算を克明に追うことができる。結果として，代表者らの modified EK resolution は，Batzie-Welker の論法によって得られるものと完全に一致することが分かった。 特に, CW 複体に付随する。

①の段階では, modified EK resolution に付随する CW 複体の性質は良く分かっていなかった。一般に，**正則** CW 複体というクラスがある。位相幾何学的には，正則でないことの有難味もあるようだが，組合せ論的には，自然で重要な条件である。オリジナルの EK resolution が CW 複体に付随するか？付随するとして，その複体は正則か？ は長らく問題であったが，最近，Mermin と Clark によって肯定的に解決された。岡崎と代表者の論文 “On CW complexes supporting Eliahou-Kervaire type resolutions of Borel fixed ideals”（投稿中）では，Clark による，poset の EL shellability を用いる論法を発展させて, modified EK resolution に付随する CW 複体が正則であることを示した。さらに，イデアルが Cohen-Macaulay の場合，付随する CW 複体は閉球体と同相であることも証明している。閉球体に関する部分は，オリジナルの EK resolution でも成立する(これも，上記の論文中の結果)。

続いて，導来圏に関する結果について解説する。投稿中の論文 “Dualizing complexes of seminormal affine semigroup rings and toric face rings” および現在も執筆作業中の論文において，代表者は**半正規(seminormal)**なアファイン半群環および toric face ring の双対化複体や局所コロホモジーを研究した。なお，「半正規」は，文字通り，「正規」より弱い条件であり，古典的な概念だが，近年再び注目されている。

正規アファイン半群環が Cohen-Macaulay であるという事実は, Hochster による古典的な結果である。半正規の場合，Cohen-Macaulay とは限らず，中間次元の局所コホモロジーが残るが，その研究は意外に遅れ，Bruns, Li, Römer が2006年の論文で決定的な結果を出した(L. Reid と L.G. Roberts に前段階的な結果有り)。Bruns らの結果は完成度が高いが，証明は技巧的で(代表者には)見通しが悪く思えた。そこで，導来圏を用いて議論を整理し，幾つかの新結果を得た。

その一つは, Cohen-Macaulay なアファイン半群環の標準加群についてである。よく知られているように，d-次元のアファイン半群環は d-次元凸多面錐を定める。正規の場合，半群環は Cohen-Macaulay で，その標準加群は凸多面体の内点が与えるイデアルである。上記の論文において，代表者は，この「逆」を示した。つまり, Cohen-Macaulay なアファイン半群環 R の標準加群が，凸多面体の内点が与えるイデアルと同型(次数を忘れて良い)ならば，R は正規となることを証明した。

上記の論文のもう一つの主題である toric face ring は，アファイン半群環を「貼り合わせて」得られるもので，組合せ論的可換代数の基本的な研究対象である Stanely-Reisner 環とアファイン半群環，双方の一般化となっている。定義されたのは比較的古いが，近年になって注目され始めた。

半正規な toric face ring については，Nguyen の先行する結果がある。彼も指摘しているが， toric face ring R が半正規である為の必要十分条件は R を構成する各「パーツ」のアファイン半群環が全て半正規であることであり，自然なクラスと言える。Nguyen の研究は非常に興味深いものだが，現象をコホモロジー・レベルで捉えていることに起因する煩雑さもあり，また，R が次数付の場合に限ったものであった(代表者は，toric face ring の面白さの神髄は，次数を持たない場合も有り得ることと考えている)。上記論文では，導来圏で考えることで議論を整理し，次数に関する仮定を外している。

また，代表者は当該研究期間中に二度，J. Alvarez Montaner 氏を訪ね，多項式（より一般に，単体的な正規アファイン半群環)の単項式イデアルの **Lyubeznik 数**について，研究打ち合わせを行った。この話題に関しては， 代表者の 2001 年発表の論文において纏まった結果が得られていたが，当該分野のその後の発展を取り込むことで，上記の文脈では Lyubeznik 数が位相的不変量であること等が示され，大きな進展があった。この研究は現在も継続中であり，さらに磨きを掛けた上で，論文に纏める予定である。なお，Lyubeznik 数とは，正則局所環(や，それに準ずる「良い」環)の極大とは限らないイデアルを台とする局所コホモロジーの入射分解のサイズを測る不変量であり，非常に重要なものである。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 6 件）

① Ryota Okazaki and <u>Kohji Yanagawa</u>, “Alternative polarizations of Borel fixed ideals, Eliahou–Kervaire type resolution and discrete Morse theory” , Journal of Algebraic Combinatorics, 査読有, 2013,掲載決定

② <u>Kohji Yanagawa,</u> “Alternative polarizations of Borel fixed ideals”, Nagoya Mathematical Journal, 査読有, Vol. 207, 2012, pp. 79–93.

③ <u>Kohji Yanagawa,</u> “Sliding functor and polarization functor for multigraded modules” , Communications in Algebra, 査読有, Vol . 40 , 2012, pp. 1151–1166.

④ Ryota Okazaki and <u>Kohji Yanagawa</u>, “Alexander duality and Stanley depth of multigraded modules”, Journal of Algebra, 査読有， Vol. 340, 2011, pp.35–52.

⑤ <u>Kohji Yanagawa,</u> “Higher Cohen-Macaulay property of squarefree modules and simplicial posets”, Proceedings of the American Mathematical Society, 査読有, Vol. 139, 2011, pp. 3057–3066

⑥ <u>Kohji Yanagawa,</u> “Dualizing complex of the face ring of a simplicial poset” , Journal of Pure and Applied Algebra, 査読有，Vol. 215, 2011, pp.2231–2241.

〔学会発表〕（計 7 件）

① 柳川浩二 “Dualizing complexes of seminormal affine semigroup rings and toric face rings”，第 34 回可換環論シンポジウム， 2012 年 11 月 25 日，湘南国際村 生産性国際交流センター

② 岡崎亮太，柳川浩二， “On a minimal free resolution of a Borel fixed ideal and its supporting CW complex”，日本数学会 秋季総合分科会 代数学分科会，2012 年 9 月 21 日，九州大学

③ 柳川浩二 “Free resolutions of (variants of) Borel fixed ideals”， 第 52 回 代数学シンポジウム，2012 年 8 月 21 日， 京都大学数理解析研究所

④ Kohji Yanagawa,
“Alternative polarizations of Borel fixed ideals, Eliahou-Kervaire type resolution and discrete Morse theory”, The 7th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, 2011 年 12 月 16 日，クイニョン大学(ベトナム)
研究所

⑤ 岡崎亮太，柳川浩二， “Alternative polarizations of Borel fixed ideals and Eliahou-Kervaire type resolutions”，第 44 回環論および表現論シンポジウム，2011 年 9 月 27 日，岡山大学

⑥ 柳川浩二，“Derived categories and topological methods in combinatorial commutative algebra I, II”, 空間の代数的・幾何的モデルとその周辺, 2011 年 9 月 7・8 日，京都大学数理解析研究所

⑦ Kohji Yanagawa, “Sliding functor and polarization functor for multigraded modules”, The 6th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, 2010 年 12 月 13 日，湘南国際村 生産性国際交流センター

６．研究組織

(1)研究代表者

柳川 浩二 （Yanagawa Kohji）

関西大学・システム理工学部・准教授

研究者番号：40283006