

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 10 日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2014

課題番号：22540072

研究課題名(和文) 測地線の幾何学の基盤研究と離散数学への応用

研究課題名(英文) The geometry of geodesics and its application to the discrete mathematics

研究代表者

印南 信宏 (Innami, Nobuhiro)

新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号：20160145

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：距離空間において、局所的に最短な曲線を測地線と呼ぶ。任意の2点を最短測地線で結ぶことのできる距離空間を測地空間と呼ぶ。測地線族が持っている定性的性質と空間の幾何構造の関係についての研究をブーズマンが創始した。その方法を利用して、極を持つ完備リーマン多様体の極の集合の研究、曲面の測地流および平面凸ビリヤード問題の研究、曲面のシュタイナー比の研究、トポノゴフの比較定理の一般化と球面定理の研究、曲面上のボロノイ図とカットローカスの関係の研究について成果を上げた。さらに、非対称な距離を持つ曲面上の測地線の幾何学に発展させる見通しが付いた。

研究成果の概要(英文)：In an intrinsic metric space, a locally minimizing curve is called a geodesic. We say that a metric space is a geodesic space if any two points can be joined by a minimizing geodesic. H. Busemann put forward the geometry of geodesics in 1955 to study some properties of geodesics, the topological and metric structure of spaces. Using his methods, we produced results on the studies of sets of poles in a Riemannian manifold, the geodesic flows on surfaces and the plane convex billiard ball problems, the Steiner ratio problem for surfaces, a generalization of Toponogov's comparison theorem and some sphere theorems, the relation of a Voronoi diagram and the cut locus. We have a prospect to develop the geometry of geodesics in a non-symmetric intrinsic distance space.

研究分野：幾何学

キーワード：測地線 曲面 ボロノイ図 カットローカス シュタイナー比 平面凸ビリヤード問題 トポノゴフの比較定理 球面定理

1. 研究開始当初の背景

(1) ブーズマン流の幾何学のリーマン幾何学への応用

距離空間において、局所的に最短になっている曲線を測地線と呼ぶ。測地線族が持っている定性的性質と空間の幾何構造の関係についての研究をブーズマンが創始した。その中で、平行線の理論が幾何学の研究において重要な役割を果たしている。特に、リーマン多様体の距離構造や位相構造の研究に応用されている。ブーズマン関数の微分可能性とその多様体の距離構造及び位相構造との関係や、チーガーとグロモールによって非負曲率多様体内の全測地的部分集合の内部構造が明らかにされた(1978年)。その反対に、非正曲率多様体内の全測地的部分集合に対しては、その外部構造が調べられるはずとの考えで行った研究がある。ブーズマンが平行線の理論において重要だと考えていた問題「最大の共半直線は最大の半直線か？」に対して否定的な解答を与えた。これまでに、これらの成果が得られている。

(2) 共役点を持たないリーマン多様体の研究

普遍被覆空間において、すべての測地線が最短線になっているとき共役点を持たないリーマン多様体と呼ぶ。ホップフの定理(1948年)「2次元トーラス上の共役点を持たないリーマン計量は平坦なものに限る」について、詳細な研究を行った。この定理の一般化としては、グリーンによって成されたスカラー曲率の積分の評価(1958年)と長い間未解決問題となっていて、1994年にブーラゴとイワノフによって解決された高次元トーラスに対する同じ結論がある。私は、スカラー曲率の積分の評価の方が使い道があると考えて、専らこちらの方の研究をしてきた。グリーンとガリバー(1984年)はホップフの定理の応用として、ユークリッド平面の有界領域だけで計量を変形した場合には、ある測地線に沿って共役点が現れてしまうことを証明した。スカラー曲率の積分を用いたこの定理の高次元版。位相構造に対する仮定がない場合。平面上で有界集合の外部がユークリッド的であることと平坦であることとの違いを平行線の理論の立場から考察した。ホップフの定理の仮定は、すべての点がポールであると読むことができる。ポールの存在だけから同じ結論は出ない。しかし、コンパクトで、測地線を1次元の部分多様体と見て、測地線の焦点にならない点が存在すればすべての点がそのような性質を持つので、このようなポールが一点でもあれば、ホップフの定理と同じ結論が出る。2次元トーラス上の測地線の族がいかなる性質を持つとき共役点が存在しないかを調べた。この性質は、モー

ザーとバングルトやカトックとピアリーが指摘しているように、ある見方をすると、平面凸曲線内のビリヤードボールの軌道の研究に繋がる。

(3) 行列値リッカチ微分方程式の応用範囲の拡大

測地線族から生じるヤコビ場の研究方法を交わらない曲線族から生じる変分ベクトル場へ応用する試み。共役点を持たないリーマン多様体の研究では、行列値ヤコビ及びリッカチ型微分方程式の解の存在がわかっただけで、それが何から導かれたかにはあまり関係しないものが多い。ホップフの定理、共役点を持たない多様体の単位接球束上の測地流の測度論的エントロピーの計算やアソフ性質等がそれである。そこで、行列値ヤコビ及びリッカチ微分方程式が役立つような例を、これらの定理や性質を他の対象に移植するという形で探した。ホイヘンスの原理が成り立つ2階の常微分方程式の解曲線からなる曲線族。自然なラグランジュ力学系の軌道からなる曲線族。勾配流の軌道からなる曲線族。また、境界付きリーマン多様体の境界において反射する測地線の族。glued リーマン多様体上の測地線の族。これらが応用の対象になる。

(4) ビリヤード台としての図形、及び、貼り合わせリーマン多様体の研究

ビリヤード球の軌道の研究や貼り合わせリーマン多様体の研究を滑らかなリーマン多様体の研究の応用として行う。楕円の各点は、ビリヤードボールが描くn角形の頂点になり得る。これは、ポンスレーの定理の応用として証明される。各点がビリヤード三角形の頂点となりえるが、楕円ではない例を見つけた。ビリヤード問題におけるバーコフ予想「平面凸曲線のビリヤードが積分可能ならば、その凸曲線は円か楕円である」に対して、ピアリーは、1993年に円である場合に対する部分解を証明した。この部分解は、ビリヤードボール力学系を離散力学系と見て証明を与えたものである。それに対して、ヤコビ型微分方程式の解の応用として、別証明と高次元化及び可変曲率の場合の定理を与えた。この取り扱い方は、そのまま glued リーマン多様体にも適用される。

(5) 曲面上の最短ネットワーク問題、特に、曲面のシュタイナー比問題

曲面上の有限個の点を総長が最短になるような線で結び合わせる問題を最短ネットワーク問題という。その解を最小シュタイナー木と呼ぶ。新たに点を付け加えない最短な木を最小全域木と呼ぶ。これらの長さの比の

下限をシュタイナー比と呼び、計算量の違いから、この比が重要である。平面のシュタイナー比は $3/2$ であることが、1968年にギルバートとポラックによって予想され、1990年にドウとホワングによって肯定的に解かれたとされていた。その後、1998年にルービンシュタインとウエングが球面のシュタイナー比も同じであることを証明したと発表した。ポワンカレ円板のシュタイナー比は $1/2$ であることの証明に成功した(2005年)。ところが、ドウとホワングの証明に誤りがあることを発見した(2008年)ので、平面および球面のシュタイナー比は予想に逆戻りとなった。測地線の幾何学は、最短曲線に関する問題への応用がたくさんある。

(6) 古典微分幾何学の話題に関する研究。その他

定曲率空間の特徴付け。面積や体積に関する研究。エルゴードの性質と幾何構造の研究。 n -平面公理や n -球面公理の応用として、定曲率空間の特徴付けを行った。4次元以上のリーマン多様体において、4点の凸包体が2回のコンベックスコンビネーションによって作られるならば定曲率空間であるという結果は、ユークリッド空間を舞台として行われている凸解析のアナロジーをリーマン多様体で展開することは不可能に近いことを示唆している。底多様体上で殆どすべての位置と方向から出発した測地線がどんな方向からでもよいから勝手な点の近くを通るという状況を表現するために、「測地流が底多様体でエルゴード的である」ということを表現する概念を導入し、これを用いて、2次元トーラス上の計量が平坦であるための一つの十分条件を与えた。その後、ドネイによって、球面や2次元トーラスの計量で、単位接球束上の測地流がエルゴード的であるものが発見され、これらの計量の間微妙な違いが理解される。ユークリッド空間の領域の表面積 A と体積 V との比 A/V についての上からの評価を表面からの内向き単射半径を用いて与えた。逆向き等周不等式と呼べるものである。2次元3次元の場合は、もっと詳しく計算され、表面が球面と異なっている場合にはその上限が変わるという興味ある結果を得た。高次元の場合を試みているが、まだ旨くない。 A や V , A/V の評価は、等周問題、ラプリアンの研究、部分多様体から一定距離の部分の体積や表面積の計算(ホテリングワイルの定理)、等径部分多様体の研究等いろいろな研究分野に登場するので、幾何学の様々な分野と関係している。

2. 研究の目的

学術的背景に記したように測地線の幾何

学はの研究対象は多岐にわたる。今までの研究を踏まえて、曲面上の最短ネットワーク問題の研究を中心にして、それに必要な測地線の幾何学の基盤研究を行う。物体の表面は貼り合わされた曲面である場合が多いので曲面上でこの問題は重要である。具体的な目的は、非負アレキサンドルフ曲面のシュタイナー比を求めることである。その中で、ドウとホワングの定理の証明が修正されることを期待している。多様体の位相構造や計量の存在、多様体間の写像の研究が多い中で、私の研究は曲面上や空間中の図形を測地線を使って扱う点が特色である。幾何学分野において、2点を結ぶ最短線の研究はなされたが、 n 点の場合はほとんど扱われなかった。1次元プラトール問題である。最短ネットワーク問題や凸ピリヤード問題を測地線の幾何学の立場での研究は独創的である。

3. 研究の方法

本研究の参考となる分野の専門家から知識の提供を受けたり、専門家との本研究についての議論や検討を行うという数学研究のオーソドックスな方法で研究を遂行した。ただし、具体的な解決法のアイデアの閃きは、それについて熱心に考えているときに出るとは限らないので、測地線の幾何学分野全体を常に研究対象として行った。そのため、研究の背景と研究成果では大きな開きが生じたが、測地線の幾何学の研究課題の拡大と深化という点では十分な成果を上げた。また、関連した分野の研究集会に参加したり、文献、図書、レクチャーノートを調べることも行った。

4. 研究成果

(1) 極を持つ完備リーマン多様体の極の集合の大きさをフォンマンゴルト曲面と比較する方法で評価した。その際に、カットローカスとコンジュゲートローカスの交わりが問題となるが、ラウチ、ワインシュタイン、クリンゲンバーク等の定理の一般化を証明した。この応用として、極を持つ完備リーマン多様体において、極でない点では、接カットローカスと接コンジュゲートローカスは共通点を持つことを証明し、極の集合の大きさの評価につながった。(雑誌論文)

(2) 体積有限な多様体の測地流は、ポワンカレの再帰定理によって、単位接束上のほとんどすべての点に対して、再帰的になっている。この性質を元にして、底空間の測地線の挙動に対して、二つの条件を考えた。位相的な混合性に類する性質とエルゴード性に関する性質に対応している。前者については、2次元回転トーラスに対しては成立することを示すことに成功した。後者に対しては、エルゴ-

ド分割をしたときに、その成分を不変なレベルとする第1積分が存在する力学系と密接に関係することが分かり、極の存在の問題と関係させて成果を得た。力学系理論において、積分可能性とエルゴード性は全く異なった性質であるが、測地流を底多様体の測地線の幾何学と見るときに、これらが関連したことになる。特に、エルゴード的な性質において、平坦トーラスの役割が明確になった。また、長年解決することのできなかつた平面凸ピリヤードにおける底エルゴード性による円の特徴づけに成功した。(雑誌論文)

(3) 離散数学分野では、曲率が非負の曲面 M 上の有限点に対する最小シュタイナー木に対して、次の結果を得た。与えられた M 上の有限点に対して、適当なインマースド多角形を考える。そのとき、この多角形の中での最小全域木と同じ長さの最小全域木を持ち最小シュタイナー木の長さが短くなるユークリッド平面のインマースド多角形が存在する。これにより、シュタイナー比の比較定理がある程度できあがった。(雑誌論文)

(4) 完備リーマン多様体 M の断面曲率が定数 c 以上であるとする。曲率が定数 c である完備単連結曲面を $M(c)$ とする。トポノゴフの比較定理は次のように述べられる。 M 上の測地三角形に対して、対応する三辺が同じ長さである三角形を $M(c)$ 上に作る時、対応する内角は、 M の三角形のものよりも大きくなる。この定理を基点つき完備リーマン多様体のラジアル曲率と平面に同相な回転面の曲率との比較があれば、頂点の1つが基点である三角形に対して、同様のことが成り立つことを証明した。トポノゴフの比較定理は、従来、比較三角形との間の対応する角の大小関係やアレキサンドルフの凸性で述べられる。この性質を参照回転面上の参照曲線と最短線の位置関係で記述した。(雑誌論文)

(5) 従来の球面定理では、直径の端点が他方の臨界点であることが重要であったが、放射曲率を用いたトポノゴフの比較定理の応用として、この性質によらない新しいタイプの条件を見出した。(雑誌論文)

(6) ボロノイ分割を与える境界線は、2点までの等距離集合(二等分線)である。このためボロノイ分割の研究には二等分線を研究することが必須である。二等分線を調べるために、2点までの距離関数の差と曲面の幾何構造について研究した。モース理論的な議論がうまく適用でき、距離関数の差のレベル集合の変化とオイラー数の関係について興味ある発見をした。(雑誌論文)

(7) 曲面上では閉集合のカットローカスの構造は完全に決定している。その構造から、距離関数は非退化な臨界点を持つ関数のように振舞うことが分かり、モース理論が応用できる。曲面上の距離関数とカットローカスおよび曲面の位相構造との関係を明らかにした。実際、曲面の場合には、距離関数を増大させると、位相構造が臨界点でどのように変化するか追跡することに成功した。(雑誌論文)

(8) この方法は、ボロノイ図の辺とカットローカスの関係の研究にも利用した。曲面上のボロノイ図の研究に関しては、与えられた有限点集合のカットローカスとボロノイ図の辺との関係を十分に記述することに成功した。実際、ボロノイ領域が円板と同相になるための条件を見つけ、その条件下でボロノイ図の辺が基点達のカットローカスのどのような部分集合になるかを明らかにした。(雑誌論文)

(9) リーマン多様体上の2点に対して、その2点を結ぶ最短測地線の始点と終点における角度的な分布状態と空間の位相的幾何構造との関係についての研究で成果を上げた。実際、球面や高次元平面を特徴づけることを目標として発展させた。モデル曲面を2次元球面や平面と同相な回転面とし、Grove-塩濱の直径球面定理を手本として、距離関数の臨界点理論を用いた球面や平面を特徴づける定理の証明に成功した。(雑誌論文)

(10) フィンスラー計量から曲線の長さの下限で導入される内部距離は対称ではない。対称化距離としては、導入された距離関数の対称化、その対称化された距離の内部距離化、および、基本関数を対称化した後で導入される内部距離という3つが考えられる。これらの距離の間の関係を明らかにして、その測地線の違いが鮮明に表れる回転トーラス上のフィンスラー計量の例を構成した。構成した計量はフィンスラー幾何学で良く扱われるランダース計量である。(学会発表、)

5. 主な発表論文等

(雑誌論文)(計13件)

Nobuhiro Innami, Uneme Yuya: Angular distribution of diameters for spheres and rays for planes, Pacific J. Math. (掲載決定印刷待)(査読有)

Nobuhiro Innami, Katsuhiko Shiohama, Yuya Uneme: The cut locus and Voronoi diagram of a finite set of points in a surface, manuscripta math., (2015) DOI 10.1007/s00229-015-0733-y (22 pages). (査読有)

Nobuhiro Innami, Katsuhiro Shiohama, Yuya Uneme: The front of increasing concentric balls and cut locus in a surface, *Diff. Geom. Appl.*, 34 (2014) 80-86. (査読有)

Nobuhiro Innami, Katsuhiro Shiohama, Yuya Uneme: A sphere theorem for radial curvature, *Nihonkai Math. J.*, 24, 2 (2013) 93-102. (査読有)

Nobuhiro Innami, Katsuhiro Shiohama, Yuya Uneme: The Alexandrov-Toponogov comparison theorem for radial curvature, *Nihonkai Math. J.*, 24, 2 (2013) 57-91. (査読有)

Nobuhiro Innami, Yoe Itokawa, Katsuhiro Shiohama: Complete real hypersurfaces and special K-line bundles in K-hyperbolic spaces, *International J. Math.*, 24, 10 (2013) 1350082 (14 pages). (査読有)

Nobuhiro Innami: Differentiability of invariant circles for strongly integrable convex billiards, *Nihonkai Math. J.*, 24, 1 (2013) 1-17. (査読有)

Nobuhiro Innami, Shintaro Naya: A comparison theorem for Steiner minimum trees in surfaces with curvature bounded below, *Tohoku Math. J.*, *Tohoku Math. J.*, 65, 1 (2013) 131-157. (査読有)

Nobuhiro Innami: The asymptotic behavior of geodesic circles in a 2-torus of revolution and a sub-ergodic property, *Nihonkai Math. J.*, 23, 1 (2012) 43-55. (査読有)

Igor Belegradek, Eric Choi, Nobuhiro Innami: Rays and souls in von Mangoldt planes, *Pacific J. Math.*, 259, 2 (2012) 279-306. (査読有)

Nobuhiro Innami, Katsuhiro Shiohama, Toshiro Soga: The cut loci, conjugate loci and poles in a complete Riemannian manifold, *Geom. Funct. Anal.*, 22, 5 (2012) 1400-1406. (査読有)

Nobuhiro Innami, Yukihiro Mashiko, Katsuhiro Shiohama: Metric spheres in the projective spaces with constant holomorphic sectional curvature, *Tsukuba J. Math.*, 35, 1 (2011) 79-90. (査読有)

Nobuhiro Innami, Byung Hak Kim, Yukihiro Mashiko, Katsuhiro Shiohama: The Steiner ratio conjecture of Gilbert-Pollak may still be open, *Algorithmica*, 57 (2010) 869-872. (査読有)

[学会発表](計 14 件)

印南信宏: フィンズラー計量を持つ回転トーラス上の測地線、日本数学会年会、2015年3月24日、明治大学(東京都・千代田区神田駿河台)

印南信宏: 曲面上のポロノイ図とカットローカス、研究集会「直観幾何学」、2015年3月10日、熊本大学教育学部(熊本県・熊本市中央区黒髪)

印南信宏: 曲面上の測地円とカットローカス、研究会「測地線及び関連する諸問題」、2015年1月10日、熊本大学教育学部(熊本県・熊本市中央区黒髪)

印南信宏: Three distances induced from a Finsler metric and their geodesics in a 2-torus, The 49th Symposium on Finsler Geometry, 2014年12月5日、長崎産業会館(長崎県・長崎市大黒町)

印南信宏: フィンズラー計量から導入される3つの距離とその測地線、福岡大学微分幾何研究会、2014年11月1日、福岡大学セミナーハウス(福岡県・福岡市中央区六本松)

印南信宏: 回転面を参照した球面定理、研究集会「測地線及び関連する諸問題」、2014年1月11日、熊本大学教育学部(熊本県・熊本市中央区黒髪)

印南信宏: 多角形に関するシュタイナー比の比較定理、研究会「直観幾何学」、2013年2月10日、熊本大学教育学部(熊本県・熊本市中央区黒髪)

印南信宏: 曲面上の多角形内の最短ネットワークの比較定理、東北大学幾何セミナー、2012年11月20日、東北大学理学部(宮城県・仙台市青葉区荒巻字青葉)

印南信宏: 球面上の二等分線、研究会「直観幾何学」、2012年2月12日、熊本大学教育学部(熊本県・熊本市中央区黒髪)

印南信宏: 平面凸ビリヤードの不变円の微分可能性について、研究集会「部分多様体幾何とリー群作用2011」、2011年9月3日、東京理科大学森戸記念館(東京都・新宿区神楽坂)

印南信宏: 2次元トーラス上の測地円の漸近挙動、幾何学阿蘇研究集会、2011年8月21日、休暇村南阿蘇(熊本県・阿蘇郡高森町高森)

印南信宏: 最短ネットワーク問題、数学教育研究会、2011年7月1日、新潟会館(新潟県・新潟市中央区幸西)

印南信宏: ラジアル曲率によるトポノゴフの比較定理について、研究集会「リーマン幾何と幾何解析」、2011年2月19日、筑波大学(茨城県・つくば市天王台)

印南信宏: 曲面上の三角形についての圧縮定理とその応用、研究会「直観幾何学」、2011年2月11日、熊本大学教育学部(熊本県・熊本市中央区黒髪)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

印南 信宏 (INNAMI, Nobuhiro)

新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号: 20160145