

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 5 日現在

機関番号：33919

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2014

課題番号：22540103

研究課題名(和文) 複素ラグランジュ部分多様体の生成関数の研究と応用

研究課題名(英文) A study on a generating function of a complex Lagrangian submanifold and its applications

研究代表者

江尻 典雄 (Ejiri, Norio)

名城大学・理工学部・教授

研究者番号：80145656

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：複素ラグランジュ部分多様体の生成関数についての基礎的な研究。他の部分多様体との関係を得た。特に複素ラグランジュ錐を作る生成関数とspecial pseudo Kaehler structureとの関係から、平坦トーラスのコンパクト向き付け可能極小曲面のヤコビ作用素のindex, nullityを、その極小曲面の第一種アーベル微分と第二種アーベル微分の周期から求めるアルゴリズムを与えた。その具体的応用として、SchwarzのP曲面、D面、H曲面の族のindex, nullityを求めた。

研究成果の概要(英文)：We study a generating function of complex Lagrangian submanifold and get the relation with other submanifolds. In particular, by the relation between a generating function of a complex Lagrangian cone and a special pseudo kaehler structure, we obtain an algorithm to compute the index and the nullity of a compact, orientable, minimal surface in a torus by the periods of Abelian differentials of the first kind and the second kind. Concretely, we can seek the index and the nullity of Schwarz' P family, D family and H family.

研究分野：微分幾何学

キーワード：複素ラグランジュ錐の生成関数 平坦トーラスの極小曲面 極小曲面の変形空間 ヤコビ作用素 index and nullity null submanifold horizontal submanifold ruled submanifold

1. 研究開始当初の背景

1. n 次元平坦トーラスのコンパクト、向き付け可能な極小曲面(ユークリッド空間では N 重周期的極小曲面を与える)のヤコビ作用素のindex, nullityの研究が、論文 Ejiri, Differential-Geometric Schottky Problem, and Minimal Surfaces in Tori (2002)で発表されていた。論文では、リーマン面からの調和写像のエネルギーを、タイヒミュラー空間上のエネルギー関数の値として捉え、そのエネルギー関数の極値である極小曲面のヤコビ作用素のindex, nullityがエネルギー関数のindex, nullityと同じであることを示している。更に、エネルギー関数は、リーマン行列の空間上の関数(これもまたエネルギー関数と呼ぶ)から導かれることを示し、極小曲面の研究とリーマン行列の研究の関係を調べるDifferential-Geometric Schottky Problemを提唱し、一定の成果を得た。そのエネルギー関数の研究は、リーマン行列の空間を、ジゲル上半空間の複素部分多様体に、一般化して、その後も続けられた。論文 Ejiri, Complex Submanifolds and Lagrangian Submanifolds associated with Minimal Surfaces in Tori (2007)では、トーラスの変形を一般化した外部パラメータを考えたリーマン行列空間上のエネルギー関数のcatastroph setを考えて、それが複素構造を持つことが示された。non-degenerate critical pointを持つirreducible componentは、パラメータ空間のcotangent bundleの実ラグランジュ錐となることが示された。この複素構造を持つ実ラグランジュ錐の研究を通して、我々が研究していた一般の複素部分多様体上のエネルギー関数は、 $2n$ 次元複素ユークリッド空間の複素ラグランジュ錐の生成関数であることが理解できるようになった。

Calabi-Yau多様体の複素構造の変形空間は、複素ラグランジュ錐を作り、その上にspecial pseudo Kaehler構造を持つ。極小曲面のWeierstrass dataの空間である変形空間を調べて、次の結果に至っていた。

n 次元平坦トーラスの種数 g のコンパクト極小曲面のWeierstrass dataの空間である変形空間からの周期写像は生成関数から構成でき、その変形空間のnon-degenerate critical pointの集合の連結成分には、special pseudo Kaehler構造が導かれる。この構造を用いて、解析的に定義される極小曲面のヤコビ作用素のindex, nullityを、複素幾何学におけるリーマン面の第1種、第2種のアーベル微分の周期から求めるアルゴリズムを構成した。

2. 研究の目的

$2n$ 次元複素ユークリッド空間の複素ラグランジュ部分多様体の生成関数を研究し、その応用を与える。

(1) 生成関数の具体的な構成と生成関数によるcomplex Lagrangian submanifoldとspecial pseudo Kaehler structureの研究。

(2) トーラスの種数 g のコンパクト極小曲面の変形空間からのperiod mapの研究とspecial pseudo Kaehler structureの研究。特に極小曲面のヤコビ作用素のindexとの関わりの研究。

(3) 3次元トーラスのCMC安定極小曲面の研究。

(4) 生成関数によるリー変換の一般化。

(5) リー変換による断面曲率-1の3次元双曲空間のCMC1曲面と平坦曲面の研究。

3. 研究の方法

(1) 関連すると思われる研究資料の収集。

(2) 学会及び研究集会に参加、発表を通して研究を深める。

(3) 名城大学幾何学研究集会の開催に協力。

(4) 研究打ち合わせで、研究内容や論文内容の検討。

4. 研究成果

(1) 研究成果

N. Ejiri,

A generating function of a complex Lagrangian cone in H^n について。

$2n$ 次元複素ユークリッド空間の複素ラグランジュ錐の生成関数であるエネルギー関数の基本的な研究を行い、エネルギー関数のindex, nullityと、そのcatastroph setの研究との関わりを調べた。特に、種数3の3次元トーラスに埋め込まれた極小曲面の真の変形空間は実9次元であり、複素9次元の変形空間に与えられるspecial pseudo Kaehler structureに関してラグランジュ部分多様体となっている。Meeks族は、このラグランジュ部分多様体として捉えられる。Meeks族が与えるラグランジュ部分多様体とGyroid, Lidinoidが与えるラグランジュ部分多様体が異なりそれらの交差する極小曲面は自明でないヤコビ場を持つことが分かった。このような交差する極小曲面での近傍の極小曲面の研究が今後重要である。上記の論文にまとめられた。

位置づけとインパクト

極小曲面のWeierstrass dataの空間である変形空間に、新しい幾何構造としてspecial pseudo Kaehler構造を導いたことは、今迄の極小曲面の研究にはなかったことであり、そ

の結果として得られたヤコビ作用素の index, nullity を求めるアルゴリズムは、まったく新しい方法となっている。

今後の展望

平坦トーラスの極小曲面の変形空間の研究に新しい視点を与えた。この方法の拡張は、今後の極小曲面の研究の方向となる。

(2) 研究成果

Norio Ejiri and Toshihiro Shoda,
On a moduli theory of minimal surfaces
について。

極小曲面のヤコビ作用素の index, nullity を、リーマン面の第1種、第2種のアーベル微分の周期から計算するアルゴリズムが実際に機能することを示した結果である。リーマン面の第1種、第2種のアーベル微分の周期について詳しい佐賀大学の庄田敏宏准教授と共同研究をした。3次元平坦トーラスの種数3の極小曲面の one parameter 族である P 族、D 族、Gyroid、CLP 族、H 族、TT 族 (rPD 族) の index, nullity を決定した。これらの研究により3次元平坦トーラスの種数3の極小曲面でヤコビ作用素が index=1 となるものを決定するアルゴリズムとして大変有効であることがわかった。まとめを論文として発表した。

位置づけとインパクト

1992年RossはP、D曲面、GyroidはCMC安定であることを示した。特に、ヤコビ作用素について index=1, nullity=3である。その後、20年以上 index, nullity は求められていない。ヤコビ作用素の index, nullity 研究のブレークスル を与えた。

今後の展望

3次元平坦トーラスのヤコビ作用素の index=1 を持つ極小曲面は、種数が3であるという Ros の結果 (2006年) がある。3次元平坦トーラスの埋め込まれた CMC 安定極小曲面を分類するために必要であるヤコビ作用素の index が1の極小曲面の分類が可能になった。更に、3次元平坦トーラスの埋め込まれた CMC 安定曲面の分類への道筋が得られた。

(3) 研究成果

N. Ejiri, S. Fujimori and T. Shoda
A remark on limits of triply periodic
minimal surfaces of genus 3 について。

極小曲面の族である実9次元の Meeks 族は、大変興味深い族である。すなわち真の変形族として最大次元である9次元であり、リーマン構造を崩壊させることができるまで大域的であるからである。そこでリーマン構造を崩壊させたときに現れる極小曲面のとして、2重周期的極小曲面である Rodriguez のすべての standard example が出現するこ

とが示された。更に崩壊させれば1重周期的極小曲面である Riemann の極小曲面、更には2つに分裂した helicoid や catenoid も出現する。Meeks 族ではない H 族、hCLP 族を考えれば、one parameter 族であるが、崩壊して Karcher の saddle tower が現れている。

位置づけとインパクト

変形空間の研究に位置づけられる。3重周期的極小曲面の崩壊で、どのような極小曲面が現れるかという興味ある問題を Meeks 族で調べた。崩壊の問題は、今後の極小曲面の重要な問題である。

今後の展望

ソフトマタ (高分子、液晶、コロイド、両親媒性分子) の分野でもいろいろな構造が調べられ、異なる構造間の転移の研究が行われている。構造の一つとして、共連結構造があり、3重周期的極小曲面が研究されている。構造間転移を、曲面の変形と捉えて、我々の研究との関連を調べることが重要となった。

(4) 研究成果

N. Ejiri
Ruled complex Lagrangian submanifolds of
dimension in \mathbb{C}^4 について。

複素 $2n$ 次元のユークリッド空間には complex symplectic form が定まる。この complex symplectic form を n 次元の部分多様体に導いたときに消えているなら、この部分多様体を複素ラグランジュ部分多様体と呼ぶ。複素ラグランジュ部分空間のなすグラスマン多様体と tautological vector bundle を考える。その中の複素多様体に引き戻しのできる vector bundle 上の、closed holomorphic 1 form を用いて複素ラグランジュ錐を変形する方法を与えた。複素ラグランジュ部分空間のなすグラスマン多様体の null 部分多様体を定義し、良く知られた Klein 対応と Lie 変換の一般化を与えた。

特に、4次元複素ユークリッド空間の場合に、具体的に調べ、我々の作った複素ラグランジュ錐からの変形は、ruled 複素ラグランジュ部分多様体への変形となることが分かった。

位置づけとインパクト

生成関数の応用として得られた結果である。 $n=2$ の場合は、複素ラグランジュ部分空間のなすグラスマン多様体は 3-quadric であり、その null curve は、曲率-1の双曲空間の平均曲率1の曲面と関係している。一方、対応する3次元複素射影空間の複素接触構造についての contact curve は曲率-1の双曲空間の平坦曲面と関係する (Bryant, Martin, Umehara and Yamada, Ejiri and Takahashi)。

また、3次元複素ユークリッド空間の ruled special ラグランジュ部分多様体の研究は、Harvey and Lawson, Bryant, Joyce によって研究されていた。ruled 複素ラグランジュ部

分多様体は、 \mathbb{C}^4 の ruled special ラグランジュ部分多様体と見なせるので部分的な一般化となっている。

今後の展望

高次元の ruled special ラグランジュ部分多様体の研究に使われる。また、平均曲率 1 曲面や平坦曲面の一般化を考える場合には、Null 部分多様体と horizontal 部分多様体 (contact curve の一般化) は 欠かせないものである。

(5) 研究成果

N. Ejiri and K. Tsukada

A remark on complex Lagrangian cones in H^n について。

n 次元四元数ユークリッド空間は四元数 i, j, k から決まる複素構造 I, J, K を持つ。 I についての $2n$ 次元複素ユークリッド空間に対して、 J, K は complex symplectic form を定める。複素ラグランジュ錐は、 I について複素錐、 J, K に関して実ラグランジュ錐と見なされる。 I の定める $2n-1$ 次元複素射影空間に複素接触構造を入れると、その複素錐はその複素接触構造の horizontal 部分多様体となっている。一方、 J の定める $2n-1$ 次元複素射影空間では、極小ラグランジュ部分多様体が得られる。どちらも同じ $2n-2$ 次元四元数射影空間の totally complex 部分多様体を与える。この極小ラグランジュ部分多様体は、horizontal 部分多様体のある tube で与えられることが示された。

位置づけとインパクト

江尻と塚田は、horizontal 部分多様体からの tube として、既に、この極小ラグランジュ部分多様体を得ていた。その幾何学的意味について complex symplectic form の研究を通して調べたものである。

今後の展望

極小曲面の Weierstrass data の空間である変形空間が与える horizontal 部分多様体の研究が今後重要である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

N. Ejiri, S. Fujimori and T. Shoda,

A remark on limits of triply periodic minimal surfaces of genus 3,

Topology and its Applications,

査読有り

Accepted 20-June-2014.

N. Ejiri and T. Shoda,

On a moduli theory of minimal surfaces, Prospects of Differential Geometry

and its Related Fields,

査読有り

Vol. 2, 2013, 155-172.

N. Ejiri,

Ruled complex Lagrangian submanifolds of dimension in \mathbb{C}^4 ,

Prospects of Differential Geometry

and its Related Fields,

査読有り

Vol. 2, 2013, 213-225.

N. Ejiri and K. Tsukada,

A remark on complex Lagrangian cones in H^n ,

Recent Progress in Differential

Geometry and its Related Fields,

査読有り

Vol. 1, 2011, 151-157.

[学会発表](計 8 件)

江尻典雄、藤森祥 (講演者)、庄田敏宏

3重周期的極小曲面の退化極限,

日本数学会秋季総合分科会

2014年9月25日~9月28日

広島大学(広島県東広島市)

江尻典雄

On limits of triply periodic minimal surfaces of genus 3,

研究集会「四元数複素微分幾何学とその

周辺/Quaternionic complex, differential Geometry and related topics」

2014年9月4日

お茶の水女子大学(東京都文京区)

Norio Ejiri

The deformation of a compact orientable minimal surfaces in a torus,

The second Japanese-Spanish Workshop on Differential Geometry (招待講演)

2014年2月5日~2月10日

Tokyo Institute of Technology(東京都目黒区)

Norio Ejiri

Ruled complex Lagrangian submanifolds of dimension two in \mathbb{C}^4 ,

International Workshop on Special

Geometry and Minimal Submanifolds (招待講演)

2013年8月8日~8月10日

Tohoku University(宮城県仙台市)

江尻典雄

H^n 内の複素ラグランジュ部分多様体について,

RIMS 研究集会 部分多様体と四元数構造 (招待講演)

2012年6月25日~6月27日
京都大学数理解析研究所(京都府京都市)

江尻典雄

Minimal surfaces of genus 3 in T^3 ,
名城大学幾何学研究集会「極小曲面と幾何構造」(招待講演)

2012年3月5日~3月7日
名城大学(愛知県名古屋市)

江尻典雄

トーラス内の極小曲面の変形空間上の special pseudo Kaehler structure とその応用,

京都大学数理解析研究所「部分多様体の微分幾何学的研究」(招待講演)

2011年6月27日~6月29日
京都大学数理解析研究所(京都府京都市)

Norio Ejiri

Special pseudo Kaehler metrics, signature, index on a deformation space of minimal surfaces in tori

国際研究集会 Differential Geometry and Tanaka Theory~Differential System and hypersurface Theory~ (招待講演)

2011年1月24日~1月28日
京都大学数理解析研究所(京都府京都市)

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者

江尻 典雄 (Ejiri Norio)
名城大学・理工学部・教授

研究者番号：80145656

(2)研究分担者

()

研究者番号：

(3)連携研究者

小澤 哲也 (Ozawa Tetuya)

名城大学・理工学部・教授

研究者番号：20169288

橋本 英哉 (Hashimoto Hideya)

名城大学・理工学部・教授

研究者番号：60218419