

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 2 日現在

機関番号：34504

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2014

課題番号：22540107

研究課題名(和文) 現代的観点による古典的微分幾何の展開とその応用

研究課題名(英文) Research on classical differential geometry from modern view points and its applications

研究代表者

黒瀬 俊 (Kurose, Takashi)

関西学院大学・理工学部・教授

研究者番号：30215107

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：さまざまな空間においてその中の曲線や曲面などの性質を調べる古典的微分幾何について、主に可積分系理論などの近年発展してきた解析手法を用いて研究をすすめ、古典的微分幾何とその応用に関する多くの結果を得た。特に、一定の規則に従って時間変化する曲線から可積分系理論の方程式が自然に現れることを利用して、可積分系理論の成果に幾何学的な表現・解釈を与えた。また、古典的微分幾何を応用して、数理統計や情報理論を微分幾何的な道具と手法を用いて研究する際に現れる幾何的对象の性質や構造の一端を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：In this research program, classical differential geometry, geometry of curves, surfaces and hypersurfaces in various spaces, have been studied, mainly with the method of the theory of integrable systems. Many results on classical differential geometry and its application have been achieved; for instance, through the observation that certain sorts of changes with time of curves yield equations dealt with in the theory of integrable systems, geometric descriptions and/or interpretations of several accomplishments of the theory have been given. Moreover, by applying geometry of hypersurfaces in affine spaces, new properties of statistical manifolds, which appear in information geometry, the study of mathematical statistics and information theory with differential geometric tools and methods, have been obtained and the statistical manifolds satisfying some curvature condition have been explicitly constructed and classified.

研究分野：微分幾何

キーワード：古典的微分幾何 曲線の運動 可積分系方程式 多重ハミルトン系 統計多様体 ヘッセ多様体 ヘッセ断面曲率

1. 研究開始当初の背景

古典的微分幾何は、変換群が推移的に作用する空間において、その作用の下で空間内の部分多様体の不変な性質を研究する幾何学の総称であり、20世紀初めまでは微分幾何の主要分野の一つであったものの、1930年ごろを境に衰退していき、その成果の多くは近年まで忘れられていた。ところが1980年代に入り古典的微分幾何の諸分野が現代的な語法で再構成されると、これらが幾何として豊かな内容を持っていることが再認識されるようになった。さらに、古典的微分幾何は、近年大きく発展した可積分系理論に対してその実例と問題を豊富に与える供給源の一つとなっただけでなく、複素幾何や応用数学的な分野である情報幾何などにも応用されるなど、それまでは思いもよらなかった広がりを見せるようになっていた。本研究代表者は、比較的早い時期から古典的微分幾何の中のアフィン微分幾何と射影微分幾何の研究を開始し、これらの分野の再構築と応用に関していくばくかの寄与をすることができたが、古典的微分幾何の隆盛期に蓄積された膨大な成果から見ると、ほんの些少な一部をすくいあげたに過ぎないものであった。そこで、より総合的・長期的な視野に立って古典的微分幾何とその応用を現代的な観点から研究するため、本研究を計画した。

2. 研究の目的

上で述べたように、本研究では長期的な視野に立って古典的微分幾何を総合的に研究すること、特に古典的微分幾何の各幾何学をそれぞれで閉じた体系とは見ず、相互の連関や応用まで見すえて研究を行うことを目的とした。より具体的に、申請時における当初の研究目標を述べると、

- (1) 古典的微分幾何において蓄積されてきた結果を、可積分系理論を含む現代的な観点から書き直し再検討することでその新たな展開を図り、また古典的微分幾何の各幾何学間の連関をあきらかにすること
- (2) その成果を用いて、可積分系理論に具体例と問題をより豊富に供給し、また可積分系理論自体の幾何学化を図ること
- (3) 古典的微分幾何の複素幾何・情報幾何などへの応用をいっそう推し進めることである。

3. 研究の方法

「1. 研究開始当初の背景」でも述べたように、本研究課題の対象である古典的微分幾何はアフィン微分幾何・射影微分幾何をはじめとする様々な幾何学の総称であり、その幾何学のどの一つを取り上げて膨大な成果が蓄積されているため全貌をとらえることは容易ではない。そこで本研究においては、代表者に7名の連携研究者を加えて研究組織を構成し、(1) 古典的微分幾何のうち、いくつかの幾何学を選んで重点的に研究を進め

つ、他への関連や応用を明らかにしていく方法と、(2) 個別トピックを取り上げて、そのトピックに関して古典的微分幾何の諸分野を横断的に研究する方法を同時進行させることとした。具体的には、さらに以下の通り小項目に分けて、それぞれをカッコ内にあげたメンバーが主となって研究を進めた。

(1) 重点的分野の研究

アフィン微分幾何・射影微分幾何とその応用の研究(黒瀬・古畑)

メビウス幾何・共形幾何とその応用の研究(陶山)

複素空間形内の実超曲面とその応用の研究(濱田)

(2) 個別トピックの研究

曲線の運動に付随する微分方程式の研究(黒瀬・川久保・藤岡)

曲面論に現れる可積分系の研究(松浦・井ノ口・藤岡)

また、それぞれの項目で得られた成果を有効に組み合わせるため、メンバー間で研究打ち合わせの機会をできるだけ多く持ち、相互の連絡を緊密に保つようにした。

3. 研究成果

本研究課題に関して、研究代表者および連携研究者によって得られた成果のうち主なものを述べる。

(1) 古典的微分幾何のいくつかの幾何において、曲線の運動と付随する可積分系方程式の関係を調べ、幾何的な見地から付随する可積分系方程式の性質や離散化について研究した。その結果、

KdV 階層が付随するアフィン平面の曲線の運動、変形 KdV 階層が付随するユークリッド平面の曲線の運動はそれぞれの曲線の空間上の無限多重ハミルトン系として記述され、さらに KdV 階層と変形 KdV 階層の間のミウラ変換は、この二つの多重ハミルトン系間の幾何的な変換で与えられることが分かった。

の一つの一般化として、変形 KdV 方程式が付随するユークリッド球面上の曲線の運動に対しても、曲線の空間上のハミルトン系としての記述を与え、さらにアフィン平面の曲線の空間へのハミルトン系の変換でミウラ変換を与えるものを構成した。

離散ないし半離散変形 KdV 方程式が付随する離散空間曲線の運動や離散バーガス階層が付随する平面離散曲線の運動を定式化し、また各方程式の解に対して、対応する離散曲線の運動を明示的に与える公式を見つけた。

以上の成果は、可積分系理論を幾何学化する上で曲線の運動の研究が非常に有効であることを示すものであり、今後も対象を広げていくことでより多くの実りをもたらすものと予想される。

(2) アフィン微分幾何と情報幾何に自然に

現れる幾何的对象である統計多様体およびその一種であるヘッセ多様体について、アフィン微分幾何・情報幾何双方の観点から研究を進め、主として以下の結果を得た。

ヘッセ多様体に対して定義されるヘッセ断面曲率が恒等的に零または負定数である場合に、ある種の極大性を持つヘッセ多様体をすべて構成し分類した。また、ヘッセ断面曲率が正定数である場合には、上と同種の極大性を持つ二次元ヘッセ多様体をすべて構成し、こうして得られた6(7)種類のヘッセ多様体のうち4種類の分類を完了した。しかしながら、正定数の場合は一般次元ではまだほとんど手がついておらず、二次元に限っても分類を進めるには大量の計算が必要とされるため、進行が遅れ気味である。そのため、今後は構成・分類のための新しい着想が必要であると考え、模索中である。

ヘッセ多様体の接束上にはケーラー多様体の構造がはいる。このケーラー多様体の関数論的性質、特に(小林)双曲的になるための条件を調べ、いくつかの十分条件・必要条件を得た。ただし、それらの間にはまだかなり大きな乖離があり、この距離を縮めていくことが今後の大きな課題である。その他、基となるヘッセ多様体のヘッセ断面曲率が定数のとき、接束の正則断面曲率も一定となるので、得られたヘッセ断面曲率が非正定数の極大ヘッセ多様体に対して、その接束から複素空間形へのはめ込み写像を具体的に与えた。

情報幾何に現れる統計多様体上では、ダイバージェンスと呼ばれる二点関数が重要な役割を果たしている。このダイバージェンスが持ついくつかの性質に注目し、同様の性質を持つ二点関数が存在するかという観点で統計多様体を一般化することを試みた。その結果、平坦な接続を持つリーマン多様体に対しては、そのような二点関数を持つための必要十分条件を与えることができた。ただし、これにより、実際にアフィン微分幾何・情報幾何という枠組みをどの程度超えた幾何的对象が得られているかについては今後精査していく必要がある。

(3) アフィン空間のなめらかな境界を持つ凸領域に対しては、アフィン超曲面論を用いて境界での「反射」が定義でき、アフィン不変な撞球を考えることができることが東京大学・金井雅彦氏によって指摘されている。この撞球の幾何的性質を調べる第一歩として、二次超曲面で囲まれた凸領域の場合について調査し、それが双曲空間内のある領域におけるリーマン幾何的な撞球と同値であることが分かった。そこで、逆に双曲空間内の領域の撞球と同値になるアフィン撞球を決定することを次の課題と考えている。

(4) 4次元空間形内の共形平坦超曲面について研究し、以下の成果を得た。

空間形内のジェネリックな共形平坦超曲面と3次元共形平坦多様体上のギシャール網と呼ばれる特殊な座標系が対応していることが以前から知られていたが、より具体的に、ギシャール網から対応する超曲面の第一・第二基本形式を決定する方法を与えた。

特にユークリッド空間内の与えられたジェネリックな共形平坦超曲面に対して、それとは異なる共形平坦超曲面(双対超曲面)が5次元分の自由度を持って構成されることを見つけた。さらに、共形平坦な超曲面とその双対超曲面の対が、それらのギシャール網の観点からはリボクール対と呼ばれるものと対応していることを示した。

ジェネリック共形平坦超曲面に対して、局所的に2次元の負定曲率リーマン計量の1次元径数族が存在することが分かった。現在、この逆について研究を進めており、これが成功すればカルタンの問題が解決されるだけでなく、幾何学的な可積分系理論の高次元版の構築を大きく進展させることができるものと思われる。

(5) 複素空間形内の実超曲面について研究し、特に複素双曲空間内のリー実超曲面の曲率について調べたほか、(A)型等質実超曲面の第二基本形式と概接触構造を用いた特徴づけ、平坦スター・リッチテンソルを持つ実超曲面の決定などの結果を得た。

(6) 完備リーマン多様体内の弾性曲線と局所誘導階層について研究し、キルヒホッフ弾性棒に関する大域的な一意性・存在性を示した。また、3次元ユークリッド空間において局所誘導階層の準周期的な第4ソリトン解を具体的に構成し、それらのうちに周期的なものが存在することを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計15件)

A. Fujioka and T. Kurose, Multi-Hamiltonian structures on spaces of closed equicentroaffine plane curves associated to higher KdV flows, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 10(2014), 048, 11 pages, 査読有.

DOI: 10.3842/SIGMA.2014.048

黒瀬 俊, 3次元ユークリッド空間曲線の空間上の変形 KdV 流, 福岡大学微分幾何研究会講演集 2013, 2014年, 151-156, 査読無.

S. Kawakubo, Kirchoff elastic rods in five-dimensional space forms whose centerlines are not helices, *Journal of Geometry and Physics*, 76(2014), 158-168, 査読有.

J. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura and Y. Ohta, Discrete mKdV and discrete sine-Gordon flows on discrete space curves, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 47(2014), 235202 (26pp), 査読有.

H. Furuhata and T. Kurose, Hessian manifolds of nonpositive constant Hessian sectional curvature, Tohoku Mathematical Journal, 65(2013), 31-42, 査読有.

U. Hertrich-Jeromin and Y. Suyama, Conformally flat hypersurfaces with Bianchi-type Guichard net, Osaka Journal of Mathematics, 50(2013), 1-30, 査読有.

黒瀬 俊, 曲線の空間上の双ハミルトン系, 数理解析研究所講究録 1775 (RIMS 研究会「部分多様体の微分幾何学的研究」報告集), 2012年, 25-32, 査読無.

T. Hamada, Y. Hoshikawa and H. Tamaru, Curvatures properties of Lie hypersurfaces in the complex hyperbolic space, Journal of Geometry, 103(2012), 247-261, 査読有.

〔学会発表〕(計 16 件)

黒瀬 俊, 3次元ユークリッド空間曲線の空間上の変形 KdV 流, 福岡大学微分幾何研究会, 平成 25 年 11 月 3 日, 福岡大学セミナーハウス(福岡県・福岡市)
松浦望, 空間離散曲線の等周等距離変形と離散 K 曲面, 福岡大学微分幾何研究会, 平成 25 年 11 月 2 日, 福岡大学セミナーハウス(福岡県・福岡市)

川久保哲, 第 4 ソリトン曲線について, 福岡大学微分幾何研究会, 平成 25 年 11 月 1 日, 福岡大学セミナーハウス(福岡県・福岡市)

黒瀬 俊, ヘッセ多様体と双曲性, 大阪市立大学数学研究所「情報幾何と関連分野 小研究集会」, 平成 25 年 3 月 6 日, 大阪市立大学(大阪府・大阪市)

黒瀬 俊, Equiaffine plane curves from the viewpoint of billiards, ミニワークショップ「統計多様体の幾何学とその周辺(4)」, 平成 25 年 3 月 3 日, 北海道大学(北海道・札幌市)

黒瀬 俊, 可積分系方程式が付随する曲線の運動, 日本数学会年会幾何学分会特別講演, 平成 24 年 3 月 26 日, 東京理科大学(東京都)

黒瀬 俊, アフィン微分幾何と統計多様体, ミニワークショップ「統計多様体の幾何学とその周辺(3)」, 平成 23 年 12 月 2 日, 北海道大学(北海道・札幌市)

黒瀬 俊, 曲線の空間上の双ハミルトン系, RIMS 研究会「部分多様体の微分幾何学的研究」, 平成 23 年 6 月 27 日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都

市)
黒瀬 俊, 曲線の空間上のシンプレクティック構造, 福岡大学微分幾何研究会, 平成 22 年 10 月 11 日, 福岡大学セミナーハウス(福岡県・福岡市)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕
ホームページ等

<http://researchers.kwansei.ac.jp/view?l=ja&u=52012&a2=0000027&k=%E9%BB%92%E7%80%AC&kc=1&o=affiliation&pp=10&sm=affiliation&sl=ja&sp=1> (関西学院大学研究者データベース)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

黒瀬 俊 (KUROSE, Takashi)
関西学院大学・理工学部・教授
研究者番号: 30215107

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

陶山 芳彦 (SUYAMA, Yoshihiko)
福岡大学・理学部・教授
研究者番号: 70028223

濱田 龍義 (HAMADA, Tatsuyoshi)
福岡大学・理学部・助教
研究者番号: 90299537

川久保 哲 (KAWAKUBO, Satoshi)
福岡大学・理学部・助教
研究者番号: 80360303

松浦 望 (MATSUURA, Nozomu)
福岡大学・理学部・助教
研究者番号: 00389339

井ノ口 順一 (INOUCHI, Junichi)
山形大学・理学部・教授
研究者番号: 40309886

古畑 仁 (FURUHATA, Hitoshi)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号: 80282036

藤岡 敦 (FUJIOKA Atsushi)
関西大学・システム理工学部・教授
研究者番号: 30293335