

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年6月4日現在

機関番号：14303

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2012

課題番号：22540108

研究課題名（和文） 対称三対の幾何学と Hermann 作用

研究課題名（英文） The geometry of symmetric triad and Hermann actions

研究代表者

井川 治 (IKAWA OSAMU)

京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・教授

研究者番号：60249745

研究成果の概要（和文）：既約ルート系の概念を拡張した対称三対の概念を定義し、その性質を調べ、分類を行った。重複度付き対称三対を定義し、可換な Hermann 作用から重複度付き対称三対が得られ、逆に全ての対称三対はこのようにして得られることを示した。その結果を応用してコンパクト対称空間の Hermann 作用の軌道の性質を調べた。特に軌道全体のなす空間の構造や個々の軌道の性質を調べることができた。

また、完備ケーラー多様体に正則等長変換群が作用していて、この作用がハミルトンのとき、この作用に関する運動量写像を荷電粒子の運動を用いて書き下す新しい公式を与えた。この結果を応用して完備ケーラー多様体に正則等長変換群が作用し、この作用が固定点を持つとき、この作用がハミルトンのための必要十分条件を与えた。更に完備ケーラー多様体の第一ドラム コホモロジー群が消えていれば固定点を持つ正則等長変換群の作用はハミルトンのことを示した。

研究成果の概要（英文）：We introduced the notion of symmetric triad, which is a generalization of the notion of irreducible root system, and studied its fundamental properties. We defined a symmetric triad with multiplicities and showed that every symmetric triad is obtained from a commutative Hermann action. Applying these results, we studied the orbit spaces of Hermann actions on compact symmetric spaces. In particular we determined the structure of the orbit spaces of Hermann actions, and classified austere orbits.

We gave a new formula which write down the moment map for holomorphic isometric action on a complete Kaehler manifold using the motion of a charged particle when the action is Hamiltonian. Further we gave a necessary and sufficient condition that a holomorphic isometric action on a complete Kaehler manifold to be Hamiltonian when the action has a fixed point. We also showed that if the first de-Rham cohomolgy group of a complete Kaehler manifold vanishes, then a holomorphic isometric action is Hamiltonian.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	400,000	120,000	520,000
2012年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,700,000	510,000	2,210,000

研究分野：微分幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：(1) 対称三対 (2) Hermann 作用

1. 研究開始当初の背景 Bott-Samelson(1958年)はコンパクト対称空間へのイソトロピー作用が変分完備であることを示し、モース理論を対称空間へ応用した。R. Hermann(1960年)はコンパクト対称空間へのイソトロピー作用を拡張した Hermann 作用を定義し、それが変分完備になることを示した。Conlon(1969年)は Hermann 作用の分類を行った(この結果は後に松木俊彦(2002年)によって再発見された)。Heintze, Palais, Terng, Thorbergsson(1995年)は Hermann 作用が超極作用になることを示した。近年、Thorbergsson 達の一連の研究によってコンパクト対称空間への等長作用に関しては、それが変分完備になることと超極になることが同値であることが示された。Kollross(2002年)は超極作用と余等質性 1 の作用を分類した。Hermann 作用に関連した主な結果は以上であり、Hermann 作用の軌道全体のなす空間の性質や個々の軌道の性質は未知であった。

上の流れとは別に Harvey-Lawson(1982年)は austere 部分多様体という極小部分多様体の新しいクラスを定義した。Bryant(1991年)は austere 代数という代数構造を用いてユークリッド空間内のいくつかの austere 部分多様体の例を与えた。井川・酒井・田崎(2009年)は austere 部分多様体より強いクラスの弱鏡映部分多様体を定義し、対称空間の線形イソトロピー群の軌道で接空間の超球面内の弱鏡映部分多様体と austere 部分多様体を分類した。austere 部分多様体に関連した主な結果は以上であり、知られている austere 部分多様体の具体例の外側の空間はユークリッド空間か球面に限られていた。

完備ケーラーアインシュタイン多様体で、アインシュタイン定数が 0 でないときには、正則等長変換群に対する運動量写像を明示的に表す公式が知られていた。ケーラー多様体の正則等長変換群に関する運動量写像の具体的な表示が知られているのは上記の場合か与えられたケーラー多様体が具体的かつ簡単な場合に限られていた。完備ケーラー多様体に正則等長変換群が作用しているとき、その正則等長変換群のリー環の第一及び第二コホモロジー群が消えているとき、その作用はハミルトン的になることも知られていた。

2. 研究の目的 Hermann 作用は超極作用なので良いクラスの作用であるが、個々の軌道の性質や軌道全体のなす空間(軌道空間)の性質がよく調べられていなかった。そこで、これらについて調べる。特に austere 部分多様体の例はこれまで知られているものはすべて外側の空間がユークリッド空間か球面に限られていたので、Hermann 作用の軌道中、austere 部分多様体になるものや弱鏡映部分多様体になるものを分類する。

測地線の速度ベクトルとキリングベクトル場との内積が時刻に依存する保存量となるのに対して、ケーラー多様体内の標準電磁場に関する荷電粒子の速度ベクトルと正則キリングベクトル場との内積は保存量とはならない。運動量写像を用いて、これを補正し保存量を構成する。

3. 研究の方法 Hermann 作用の切断(標準形)については一応 Heintze, Palais, Terng, Thorbergsson によって与えられていたが、これを直接扱おうとすると困難があるので、軌道空間を代数的に整備した対称三対を考え、対称三対の性質や分類を用いて Hermann 作用の軌道について調べる。ケーラー多様体に働く正則等長変換群に対する運動量写像を明示的に表す研究はほとんどないが、荷電粒子の運動を用いてこれを行う。

4. 研究成果 内積を持つ有限次元ベクトル空間上に対称三対を定義した。対称三対は既約ルート系の拡張概念である。対称三対が付随したユークリッド空間の点に対して全測地点、正則点、特異点の概念が定義される。更に重複度付き対称三対を定義した。重複度付き対称三対の付随したユークリッド空間の点に対しては点の体積、平均曲率ベクトル、余次元などが定義され、その結果、極小点、austere 点を定義することができる。対称三対の全体には自然に同値関係が入る。既約ルート系が分類できるのと同様の考えで対称三対の同値類の全体を分類することができた。更に全測地点、正則点、特異点、austere 点を分類することができた。正則点の全体の連結成分をセルと呼ぶ。可換な Hermann 作用から重複度付き対称三対を構成することができた。逆に任意の対称三対はある可換な Hermann 作用から構成される対称三対になる。このとき、セルの閉包が軌道空間と同一視され、セルの閉包の点が全測地点、極小点、austere 点になるための必要十分条件はその点の軌道が全測地的部分多様体、極小部分多

様体, austere 部分多様体となることが示された. したがって可換な Hermann 作用の軌道中, 全測地的または austere になるものを分類することができた. 特に austere 部分多様体の分類ができたことにより外側の空間がユークリッド空間でも球面でもない場合に初めて austere 部分多様体の組織的な構成をすることができた. 極小点に関しては分類はできないが, 存在とある意味での一意性を示すことができた. 非可換な Hermann 作用についても軌道空間や個々の軌道の性質について研究するつもりだったが, 今後の課題として残った.

一方, Hermann は元々は Hermann 作用を超極作用としてではなく, 変分完備な等長作用として捉えていた. 変分完備性の定義はここでは省略するがキーワードは測地線とヤコビ場で, キリングベクトル場と測地線の速度ベクトルの内積が時刻によらない保存量となることを基礎に定義される. 基礎となる多様体をリーマン多様体からケーラー多様体へ, 群作用を等長作用から正則等長作用に変更した場合, 超極作用や変分完備な作用に当たる概念はあるのだろうかという疑問に当たった. この場合, 測地線に相当するものは荷電粒子の運動であろうと思われる. キリングベクトル場には正則キリングベクトル場が相当する. このとき, リーマン幾何の場合と異なり荷電粒子の速度ベクトルと正則キリングベクトル場との内積は時刻に依存し保存量とならない. ところが, 正則等長作用に関する運動量写像を用いると, この部分を補正し, 保存量を構成することができた. 荷電粒子の運動を用いて運動量写像を明示的に表す公式を書き下すこともできた. コンパクト単連結等質ケーラー多様体はケーラーC空間と呼ばれる. ケーラーC空間のイソトロピー作用に関する運動量写像や線形イソトロピー作用に関する運動量写像について詳しく調べることができた. また, 与えられた正則等長変換群が運動量写像を持つための条件を与えることができた. これらのことを基礎にしてケーラー幾何における超極作用や変分完備な作用といった標準形理論を構築することが今後の課題である.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① O. Ikawa, A note on symmetric triad and Hermann action, to appear, 査読有, (2013), 1-10, Proceedings in honor of Sadahiro Maeda's 60th birthday, World Scientific.

- ② O. Ikawa and O. Shimabukuro, Square subgroup of Rubik's Cube group, 査読有, Journal of Information Processing, Vol.21 No.3 (2013), 1-4, DOI: 10.2197/ipsjjip.21.1
- ③ O. Ikawa, Moment maps associated with holomorphic isometric actions on Kaehler manifolds, 査読有, Journal of Geometry 103 (2012), 275--284, DOI:10.1007/s00022-012-0131-5
- ④ O. Ikawa, The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions, 査読有, J. Math. Soc. Japan 63, No.1 (2011) 79--136, DOI:10.2969/jmsj/06310079
- ⑤ O. Ikawa, Motion of charged particles in two-step nilpotent Lie groups, 査読有, Journal of Geometry and Symmetry in Physics, 20 (2010) 57--67.
- ⑥ O. Ikawa, Motion of charged particles from the geometric view point, 査読有, Journal of Geometry and Symmetry in Physics, 18 (2010) 23--47.

[学会発表] (計 4 件)

- ① 2013年2月3日, 井川 治, The geometry of orbits of Hermann actions, 第6回大阪市立大学数学研究所-慶北国立大学GRG共催 微分幾何学ワークショップ, 「対称空間の部分多様体論と有限次元および無限次元リー理論」
- ② 2011.10.5, 井川 治, コンパクト対称空間の軌道の幾何学, 広島幾何学研究集会2011, 於 広島大学
- ③ 2010.12.18, 井川 治, Riemann 幾何学における標準形理論・対称三対と Hermann 作用-, 「擬リーマン幾何学の展開 III」 於 お茶の水女子大学
- ④ 2010.6.7, O. Ikawa, Motion of charged particles in two-step nilpotent Lie groups, The twelfth International conference on Geometry, Integrability and Quantization, Varna, Bulgaria.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

井川 治 (IKAWA OSAMU)

京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・教授

研究者番号：60249754

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：