

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 9 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540149

研究課題名(和文)ヘッジを考慮した凸リスク測度による価格付け理論と関連する確率過程論の研究

研究課題名(英文)Research on pricing theory by convex risk measures taking account of hedging, and its related stochastic analysis

研究代表者

新井 拓児 (ARAI, Takuji)

慶應義塾大学・経済学部・教授

研究者番号：20349830

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円、(間接経費) 600,000円

研究成果の概要(和文)：アメリカンオプションに対するショートフォールリスクを考えるため、確率過程上の凸リスク測度の研究を行った。特に、確率過程の最大値がOrlicz空間に入るような空間を導入し、凸リスク測度の表現定理を導出した。次に、凸リスク測度とgood deal boundの関係について研究した。市場が凸錐であるときに、(1) superhedging costの諸性質、(2) 凸リスク測度があるgood deal boundの上下限を与えることとrisk indifference priceであることの同値性、(3) 価格付け理論の基本定理の拡張、について調べた。さらに、市場が単に凸である場合へ拡張した。

研究成果の概要(英文)：I have studied convex risk measures on stochastic processes in order to deal with shortfall risk measures for American options. In particular, I introduced spaces of stochastic processes whose maximum belongs to an Orlicz space; and obtained representation results for convex risk measures defined on such spaces. Next, I have researched on relationship between convex risk measures and good deal bounds. Supposing the market is a convex cone, I investigated (1) properties of superhedging cost, (2) the equivalence for a convex risk measure between that it represent upper and lower bounds of a good deal bound and that it is given as a risk indifference price, (3) extensions of the fundamental theorem of asset pricing. In addition, I extended the above results to the case where the market is merely convex.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：数理ファイナンス 価格付け理論 非完備市場 リスク測度 Orlicz空間 Good deal bound

### 1. 研究開始当初の背景

条件付請求権の価格は、資産価格過程をマルチンゲールにする測度、同値マルチンゲール測度の下での期待値で与えられる。この値は条件付請求権を完全複製するヘッジ戦略の初期費用と一致する。複製戦略が存在する市場を完備市場と呼ぶが、市場の完備性は現実離れした非常に強い条件である。そこで、完備性を持たない非完備市場における条件付請求権の価格付け及びヘッジ手法の研究が重要になってくる。非完備市場では、同値マルチンゲール測度が無限個存在するが、複製戦略は存在しない。つまり、無裁定条件の下で価格が一意に決まらず、価格の候補となりうる範囲だけが求まる。これまでは何らかの意味で最適なヘッジ戦略を考え、その初期費用を価格とみなすことで非完備市場における価格付け問題が扱われてきた。しかし、どのような最適化問題が適切なものがはっきりとせず、未だに非完備市場における価格付け問題の標準理論は形成されていない。そこで、価格をピンポイントに求めるのではなく、価格の候補となる範囲を狭めることに主眼を置く研究が行われている。実際、無裁定条件だけから導かれる価格の範囲は非常に広く、実務的には役に立たない。この価格の範囲を狭めることで、価格に対する大まかな情報が得られる。価格を完全に決定することはできないが、例えば現在取引されている価格が割安なのか割高なのか、または適正な価格に近いかなどを判断することはできるようになる。この狭められた価格の範囲を good deal bound という。

私は平成 21 年度まで、損失関数で重みをつけた損失額の期待値を売り手にとってのリスクとみなし、そのリスクを制御するという設定で研究を行っていた。一般にこのようなリスクを shortfall risk と呼ぶ。売り手は、shortfall risk をできるだけ小さくするようにヘッジ戦略を組むことでリスク管理を行う。逆に、売り手にとって shortfall risk を十分小さくするヘッジ戦略を構成できる価格は、売り手にとって良い投資機会であると判断でき、これを売り手にとっての good deal price と呼ぶ。つまり、売り手が good deal price で請求権を売却できれば、適当なヘッジ戦略を組むことで shortfall risk を十分小さくすることができる。しかし、この good deal price は多くの買い手にとっては割高であるため、この価格帯での取引は成立しないであろう。従って、good deal price は請求権価格の候補に成りづらい。売り手にとっての good deal price の議論を買い手に対しても行うことができ、同様に買い手にとっての good deal price を定義できる。以上より、売り手と買い手双方の good deal price を除外することによって、good deal bound を求めることができる。この shortfall risk から導出された good deal bound の研究を、平成 19 年に日本学術振興会特定国派遣研究者と

してスイス連邦工科大学チューリッヒ校に滞在した時から行っていた。平成 21 年までの二年間の研究成果を論文「Good deal bounds induced by shortfall risk」にまとめた。この論文では、good deal bound の上下限がある特定の凸リスク測度、shortfall risk measure によって求まることを示し、その表現を得た。できる限り多くの損失関数に対応するために Orlicz heart というバナッハ空間上に問題を設定した点と、連続時間モデルを扱っている点が、これまでの先行研究と大きく異なっている。Orlicz heart を用いることで、指数関数型の損失関数等も扱えるようになった。尚、shortfall risk measure の表現の研究は、Follmer and Schied, 「Convex measures of risk and trading constraints」(Finance and Stochastics, Vol.6, 2002, pp.429-447)に端を発するが、彼ら是有界確率変数の空間  $L$  上に凸リスク測度を定義し、離散時間の枠組みで問題を設定している。

平成 22 年度当初の予定では、Orlicz 空間上に定義された shortfall risk measure に関する表現の導出において、平成 22 年度には静的な場合、平成 23 年度には動的な場合の研究を行う予定であった。また、アメリカンオプションを取り扱うため、確率過程に対するリスク測度に関する研究も考えていた。

### 2. 研究の目的

私の研究分野は確率論を用いた数理ファイナンスであり、条件付請求権(つまり将来のペイオフであり、より具体的にはオプションなどの金融派生商品を含む)の価格付けや最適ヘッジ戦略問題に端を発する確率過程論の問題に取り組んでいる。特に最近では、これらの問題に対してリスク管理の視点を取り入れた研究を行っている。最終目標は、数学的概念とファイナンス的概念の結びつきを明らかにすることと、数理ファイナンスという視点から発生した問題を通して確率過程論の一般論に対する貢献を行うことである。本研究課題では、そのような最終目標を達成すべく、非完備市場における条件付請求権の価格とヘッジの問題をリスク管理の視点から包括的に理解することを目的とした。特に、shortfall risk measure という凸リスク測度を用いて、条件付請求権の価格とヘッジ戦略に対する考察を、数学的にできる限り一般の設定の下で行う。数学的には凸リスク測度の表現の導出に帰着される。従って、本研究では order continuous でないバナッハ空間(具体的には Orlicz 空間)上の凸リスク測度に関する一般論への貢献も同時に目指した。

### 3. 研究の方法

本研究の中心課題は、Orlicz 空間上に定義された shortfall risk measure に関する表現の導出である。そのため、凸リスク測度の一般論について、関数解析学的アプローチから研究を行った。例えば、アメリカンオプシ

ンを取り扱うため、確率過程上の凸リスク測度の一般論の研究を行った。さらに、good deal boundと凸リスク測度の関係の一般論についても研究を行った。

#### 4. 研究成果

平成22年度では、条件付請求権がアメリカ型オプションのように確率変数ではなく確率過程として与えられるような場合への拡張を行った。アメリカ型オプションに対するショートフォールリスク測度を論じるため、確率過程の空間上の凸リスク測度の一般論を整理する必要がある。特に、ショートフォールリスク測度はOrlicz空間上で議論することが自然であるので、その枠組みにおける確率過程の空間を整理することから始めた。凸リスク測度のロバスト表現定理を得るためには定義域となる空間の双対空間を特定する必要がある。そこで双対空間が具体的に記述できるような空間として、確率過程の最大値がOrlicz空間に入るような空間を導入し、凸リスク測度の表現定理の導出を行った。一方、アメリカ型オプションの行使時刻は停止時刻によって与えられるので、停止時刻に関して一様可積分性を持つ確率過程の空間を定義し、通常の変数の空間上に定義されるショートフォールリスク測度を用いた表現の導出も行った。

平成23年度は主に以下の2つの研究に取り組んだ。一つ目は、請求権に対する価格の上下限を表現できる凸リスク測度を good deal valuation と名付け、一般の凸リスク測度が good deal valuation になるための条件について研究した。この結果は、ショートフォールリスク測度と good deal bound の関係についての研究を一般化したものである。これはもともと計画していたものではないが、大阪大学の深澤正彰氏と共同研究を行う機会を得たために取り組んだもので、その成果を論文「Convex risk measures for good deal bounds」にまとめた。もう一つは、確率過程の空間上の凸リスク測度の一般論に関する研究である。これは平成22年度に開始したアメリカ型条件付き請求権に対するショートフォールリスク測度を論じるためである。この研究の成果を論文「Convex risk measures for cadlag processes on Orlicz spaces」にまとめた。

平成24年度は、平成23年度に行った深澤氏との共同研究を発展させた。共同研究では、市場が凸錘であるという条件を置き、(1) superhedging cost の諸性質、(2) 凸リスク測度が good deal bound の上下限を記述することと risk indifference price になることの同値性、(3) 価格付け理論の基本定理の拡張、の3点について研究を行った。今回は、市場の制約が凸である場合への拡張を考え

た。何故ならば、流動性リスクを考慮したモデルやポートフォリオ制約があるモデルでは市場の凸錘性は成立しないからである。上記の3点に関して、凸錘の場合とそれを除去した場合の違いを詳細に調べ、論文「Good deal bounds with convex constraints」にまとめた。

#### 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 5 件)

T. Arai and M. Fukasawa, Convex risk measure for good deal bounds, to appear in *Mathematical Finance*, 査読有.  
DOI: 10.1111/mafi.12020.

新井拓児, ショートフォールリスク測度とその表現, 三田学会雑誌, 査読無, 105巻第2号, pp.91-107, 2012.  
[http://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara\\_id=AN00234610-20120701-0091](http://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20120701-0091)

T. Arai and T. Suzuki, How much can investors discount?, *Advances in Mathematical Economics*, 査読有, Vol.14, pp.1-16, 2011.  
DOI: 10.1007/978-4-431-53883-7\_1.

T. Arai, Good deal bounds induced by shortfall risk, *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 査読有, Vol.2, pp.1-21, 2011.  
DOI: 10.1137/090769120

T. Arai, Convex risk measures on Orlicz spaces: inf-convolution and shortfall, 査読有, *Mathematics and Financial Economics*, Vol.3, pp.73-88, 2010.  
DOI: 10.1007/s11579-010-0028-8.

〔学会発表〕(計 17 件)

T. Arai, Local risk-minimization for Lévy markets, *Actuarial and Financial Mathematics Conference*, 2014年2月6日, ブリュッセル・アカデミーパレス(ベルギー).

新井拓児, 鈴木良一, Local risk-minimization for Lévy markets, 確率論シンポジウム, 2013年12月19日, 京都大学数理解析研究所.

T. Arai, Good deal bounds with convex constraints, *Workshop on Knightian Uncertainty and Risk Measures*, 2013年7月4日, シンガポール国立大学(シンガポール).

T. Arai, Convex risk measures for cadlag processes on Orlicz hearts, 6th General AMaMeF and Banach Center Conference “Advances in Mathematics of Finance”, 2013年6月14日, ワルシャワ大学(ポーランド).

新井拓児, Convex risk measures for cadlag processes on Orlicz spaces, 新潟確率論ワークショップ, 2013年1月27日, 新潟大学.

T. Arai, An explicit representation of locally risk-minimizing for Lévy markets, Workshop “Mathematical finance and related issues”, 2012年9月3日, 京都リサーチパーク.

T. Arai, Convex risk measures for cadlag processes on Orlicz hearts, AMI seminar, 2012年4月20日, アルバータ大学(カナダ).

T. Arai, Convex risk measures for good deal bounds, Seminaire Bachelier, 2012年1月21日, ポアンカレ研究所(フランス).

T. Arai, Local risk-minimization for Lévy markets, Stochastic analysis seminar, 2011年12月6日, オスロ大学(ノルウェー).

T. Arai, Convex risk measures for good deal bounds, Talks in Financial and Insurance Mathematics, 2011年10月6日, スイス連邦工科大学(スイス).

T. Arai, Pricing and hedging problems in incomplete markets, Workshop on Probability Theory in honour of Professor Makoto Maejima on the occasion of his retirement, 2011年3月12日, 慶應義塾大学.

T. Arai, Shortfall risk based good deal bounds for American derivatives, Oberwolfach workshop “Stochastic analysis in Finance and Insurance” (short communication), 2011年1月27日, Oberwolfach 数学研究所(ドイツ).

T. Arai, Shortfall risk based good deal bounds for American derivatives, CREST and Sakigake International Symposium “Asymptotic Statistics, Risk and Computation in Finance and Insurance”, 2010年12月16日, 東京

工業大学.

T. Arai, Convex risk measures on Orlicz spaces ---inf-convolution and shortfall---, 34th Conference on Stochastic Processes and Their Applications, 2010年9月6日, 大阪・千里ライフサイエンスセンター.

新井拓児, ショートフォールリスクから導かれる請求権の価格付け理論, 日本OR学会 研究部会「ファイナンス理論の展開」, 2010年7月8日, 首都大学東京秋葉原オフィス.

T. Arai, Convex risk measures on Orlicz spaces, the Sixth World Congress of the Bachelier Finance Society, 2010年6月23日, Toronto Hilton Hotel (カナダ).

T. Arai, Convex risk measures on Orlicz spaces -inf-convolution and shortfall-, 2010 Workshop & Spring School on Stochastic Calculus and Applications, 2010年4月16日, 台湾中央研究院(台湾).

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

新井 拓児 (ARAI, Takuji)  
慶應義塾大学・経済学部・准教授  
研究者番号: 20349830