

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 19 日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540152

研究課題名(和文) Thomassen予想とクローフリーグラフの2因子の研究

研究課題名(英文) On Thomassen's conjecture and 2-factors of claw-free graphs

研究代表者

善本 潔 (YOSHIMOTO, Kiyoshi)

日本大学・理工学部・准教授

研究者番号：90307801

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円、(間接経費) 990,000円

研究成果の概要(和文)：低連結ライングラフの2因子の成分数の上限をグラフの最大独立数で評価する研究を行い次のような結果を得た。「3連結claw-freeグラフは、連結成分数が高々 $2a/5$ であるような2因子を持つ(但し、 a は最大独立数)」。一方、Thomassen予想のみならず、グラフの多くの未解決問題に対する重要な族である3正則グラフに対する研究では、Bondy予想、すなわち「適当な定数 t_0 が存在し、すべてのcyclically 4辺連結3正則グラフの最長サイクルの長さは t_0n 以上になる(ただし、 n はグラフの位数)」という予想が正しければ、Thomassen予想を弱めた主張が成り立つことを示した。

研究成果の概要(英文)：First, we studied the upper bounds of the number of components of 2-factors of low-connected line graphs, which are given by using the maximum independence number. And we got the following result: a 3-connected claw-free graph has a 2-factor in which the number of components is at most $2a/5$, where a is the maximum independence number. Next we considered cubic graphs, which is very important family of graphs for Thomassen's conjecture and many important problems and conjectures in Graph theory. And we showed that if Bondy's conjecture on cubic graphs holds, then Thomassen's conjecture holds for the case of the minimum degree at least five.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学基礎・応用数学

キーワード：グラフ理論 ハミルトンサイクル Thomassen予想 2因子 ライングラフ

1. 研究開始当初の背景

数学や情報科学において最も重要な未解決問題の一つに P-NP 予想がある。この P-NP 予想が最近グラフ理論のクローフリーグラフやライングラフの研究と密接な関係があることが Ryjacek や Kuzel らによって示された。すなわち、グラフ理論の最も有名な予想の一つである「Thomassen 予想」と最近 Kuzel によって提唱された「Kuzel 予想」そして P-NP 予想の三つの予想のなかで、少なくとも一つは正しくない。したがって、Thomassen 予想や Kuzel 予想が共に正しければ、多くの研究者が正しいと予想している P-NP 予想が間違っていることになることがわかっている。

2. 研究の目的

Thomassen 予想に対して、連結度の高いクローフリーグラフやライングラフの研究はこれまで多くなされておられ、一般にハミルトン性だけでなくより強い様々な性質を持っていることがわかってる。例えば Ryjacek と Vrana によって最近 7 連結クローフリーグラフはハミルトン連結(任意加えられた辺に対して、その辺を通るハミルトンサイクルが存在する)であることが示された。そこで本研究では全く逆に連結度の低いクローフリーグラフやライングラフの構造を分析・特徴付けを行い、4 連結クローフリーグラフや 4 連結ライングラフとの構造の相違を解明し、Thomassen 予想や Kuzel 予想を解決する手法と理論を開発することを目的とした。

3. 研究の方法

いくつかの予想のうち、まず第一に本研究者と Faudree 教授らとの予想を解決するために、Ryjacek 閉包の一般化または改良を行った。特に本研究者と Ryjacek 教授や Xing 教授との共同研究で得られたクローフリーグラフの 2 因子問題に有用な閉包を更に改良する試みをこなした。具体的には、最大独立点集合のグラフの中での分布の仕方を解析し、低連結度クローフリーグラフの の上限の最適な値を求め、その方法で得られる 2 因子の成分数の上限の最小値を確定する方法である。さらに、それらの研究から得られる低連結グラフの最大独立点集合と 2 因子の分布によってグラフの構造の特徴付けを行い、それを使って上記予想を解決を試み、未解決である低連結クローフリーグラフの 2 因子の成分数の上限の最小値を確定する極値グラフを発見を目指した。またグラフ理論の重要な族である 3 正則グラフの性質や特徴を決定する方法を行った。

4. 研究成果

claw-free グラフとは $K_{\{1,3\}}$ を誘導部分グラフとして含まないグラフであり、線グラフの一般化になっている。ハミルトンサイクルとは、全ての頂点を通過するサイクルで、Thomassen 予想とは 4 連結グラフはハミルトンサイクルを持つという予想である。2 因子とは全ての連結成分がサイクルであるような全域部分グラフで、ハミルトンサイクルを一般化した概念になっている。本研究では、2 または 3 連結といった低連結の claw-free グラフの 2 因子の連結成分数の上限についての研究を行った。

まず Ryjacek 教授(研究協力者、西ボヘミア大学 教授)を招へいし、小関博士(研究協力者、国立情報学研究所 助教)らと共同研究を行い、連結成分数の上限をグラフの最大独立数で評価する研究を行い次のような結果を得た。「3 連結 claw-free グラフは、連結成分数が高々 $2 \lfloor n/5 \rfloor$ であるような 2 因子を持つ(但し、 $\lfloor n/5 \rfloor$ は最大独立数)」。この主張から、claw-free グラフの最大独立数の上限を計算することにより、3 連結 claw-free グラフの 2 因子の成分数の上限が $2n/(5 + 10)$ で押さえられることがわかる(但し、 n はグラフの位数、 $\lfloor n/5 \rfloor$ は最小次数)。この結果は本研究者らによるこれまでの上限を大幅に改良している。さらに、Cada 博士(研究協力者、西ボヘミア大学 准教授)を招へいし、千葉博士(研究協力者、熊本大学 講師)らと共同研究を行い、2 連結 claw-free グラフが全ての連結成分が 頂点以上であるような 2 因子の存在を証明した。証明は、Faudree 教授(研究協力者、メンフィス大学 教授)や小関博士らとの共同研究によって得られた「最小次数が 7 以上のライングラフは全ての連結成分が 3 頂点以上からなる完全グラフであるような全域部分グラフを持つ」を一般化した主張を応用している。

1992 年に Jackson は Thomassen 予想を強めた、次の予想を提唱した。「2 辺連結グラフ G は適当な閉トレイル C (Tutte 閉トレイル) を持ち、 $G-V(C)$ の任意の連結成分 D に対して、 D と C を結ぶ辺は高々 3 本となるように出来る。」

この予想が正しければ、Thomassen 予想が正しいことは容易に示すことが出来る。Cada、千葉、小関、Vrana 氏(研究協力者、西ボヘミア大学 助教)との共同研究により、Jackson 予想と Thomassen 予想が同値であることを示した。Thomassen 予想はライングラフという非常に限られたグラフの族についての予想であるが、P-NP 予想との関係が分かっており、今回更に、2 辺連結グラフという、ほぼ全てのグラフが、Tutte 閉トレイルという非常に強い性質を持つという Jackson 予想と同値であることが示されたことは非常に重要で、本研究者が 23 年度 3 月にアメリカ・メンフィス大学訪問において行った共同研究でも、重要なテーマになった。

更に Jackson 予想に関連する

Kaiser-Skrekovski 予想について研究を行い、その反例を構成することに成功した。このことは、Jackson 予想を強めることが一般に難しいことを示唆しており、更に Tutte 閉トレイルを持つという性質が、局所的な性質ではなさそうだという予見を与えた。

Jackson 予想の別の方向への拡張として閉トレイルの極大性についての研究がある。即ち極大な閉トレイルが Tutte 閉トレイルになるかという問題である。この研究については、最長サイクルが必ずしも支配的サイクルにならないと予想されているのと同様、否定的なグラフの構成に成功した。

更に Tutte 閉トレイルの性質についての研究を行った。本研究者は Jackson 教授と「任意の essentially 3-edge-connected グラフは全ての成分が位数 5 以上であるような全域偶部分グラフをもつ」ことを示し、この下限 5 が最良である無限個の例を構成した。従って、一般にこの主張を改良することは出来ない。そこで本研究者は、上記 Cada 氏らとプレイメージグラフの辺を全て支配する dominating 偶グラフの研究を行い、「essentially 3-edge-connected cubic グラフは、dominating 偶部分グラフで、全ての成分が位数 6 以上のものをもつ」ことを示した。また、平成 24 年 6 月にアメリカ・バンダービルト大学で開催されたグラフのサイクルについての国際会議で、本科学研究費補助金によるこれまでの研究結果を発表し、Plummer 教授ら多くの研究者からの知見をえた。またチェコ・Domazlice で、それらに加えて、平成 24 年度に得られた結果を加えた発表を行い、特に Broersma 教授らと、cubic グラフにおける dominating 偶部分グラフについての上記の主張の、一般のグラフへの拡張についての議論を行った。

プレイメージグラフ(ライングラフの元のグラフ H)の研究と低連結ライングラフの構造の研究を行った。プレイメージグラフ H が 4 辺連結ならば、そのライングラフは 4 連結になる。しかしその逆は成り立たない。しかし、いくつかの標準的なグラフの変換によって、プレイメージグラフを essentially 4 辺連結グラフに置き換えることができる。さらに次数 4 位上の頂点に対して Fleishner 変換(適当な 2 辺を剥がす)ことによって 3 正則グラフを得ることができる。

3 正則グラフは四色問題やサイクル二重被覆問題などグラフ理論の重要な問題と関係するもっとも重要なグラフの属の一つである。したがって、これまでも多くの研究がなされてきた。本研究では、Cada 博士らとの共同研究によって、3 正則グラフの最長サイクルの長さとの関係について研究を行い、3 正則グラフの著名な予想である Bondy 予想、すなわち「適当な定数 t_0 が存在し、すべての cyclically 4 辺連結 3 正則グラフの最長サイクルの長さは $t_0 n$ 以上になる(ただし、 n はグラフの位数)」という予想が正しければ、

「適当な定数 t_1 が存在し、すべての 4 辺連結ライングラフの最長サイクルの長さが $t_1 n$ 以上になる」という予想が正しいことを示した。さらに、この主張を最小次数 5 以上の 4 辺連結ライングラフの族に制限することによって、位数の線形 ($t_1 n$) 以上の長さのサイクルの存在が、ハミルトンサイクルの存在を保証することを示した。その逆は明らかに成り立つので、最小次数が 5 以上ならば、ハミルトンサイクルの存在と位数の線形の長さのサイクルの存在が同値であることがわかった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 9 件)

1. R. Cada, S. Chiba and K. Yoshimoto, A 2-factor in which each cycle has long length in claw-free graphs, Graphs and Combin., 印刷中, 査読有 DOI: 10.1007/s00373-013-1375-z

2. R. Faudree, J. Hulan and K. Yoshimoto, Note on Locating Pairs of Vertices on Hamiltonian Cycles, Graphs and Combin., 印刷中, 査読有 DOI: 10.1007/s00373-013-1325-9

3. R. H. Schelp and K. Yoshimoto, An Extremal Problem Resulting in Many Paths, Ars Combin., 印刷中, 査読有

4. R. Cada, S. Chiba, K. Ozeki, P Vrana and K. Yoshimoto, $\{4,5\}$ is not coverable - a counterexample to Kaiser-Skrekovski conjecture, SIAM J. Discrete Math. 27 (2013) 141-144, 査読有 <http://dx.doi.org/10.1137/120877817>

5. R. Kuzel, K. Ozeki and K. Yoshimoto, 2-factors and independent sets on claw-free graphs, Discrete Math. 312 (2012), 202-206, 査読有 <http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2011.08.020>

6. R. J. Faudree, C. Magnant, K. Ozeki and K. Yoshimoto, Claw-Free Graphs and 2-Factors that Separate Independent Vertices, J. Graph Theory 69 (2012), 251-263, 査読有 DOI: 10.1002/jgt.20579

7. S. Chiba, Y. Egawa and K. Yoshimoto, A

2-factor in which each cycle contains a vertex in a specified stable set,
Australas. J. Combin. 46 (2010), 203-210,
査読有

8. K. Ishii, K. Ozeki and K. Yoshimoto,
Set-ordered as a generalization of
k-ordered,
Discrete Math. 310 (2010), 2310-2316, 査
読有
<http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2010.05.005>

9. Z. Ryjacek, L. Xing and K. Yoshimoto,
Closure concept for 2-factors in claw-free
graphs,
Discrete Math. 310 (2010), 1573-1579, 査
読有
<http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2010.02.004>

〔学会発表〕(計6件)

1. 題目 : Locating sets of vertices on
Hamiltonian cycles
会議名 : 田澤先生退職記念研究集会
場所 : 近畿大学
日付 : 2014年2月20日

2. 題目 : Locating Pairs of Vertices on
Hamiltonian Cycles
会議名 : 応用数学合同研究集会
場所 : 龍谷大学
日付 : 2012年12月21日

3. 題目 : Cycles in claw-free graphs and
even subgraphs in graphs
会議名 : 離散数学とその応用研究集会
場所 : 茨城大学
日付 : 2012年8月9日

4. 題目 : Cycles in claw-free graphs and
even subgraphs in graphs
会議名 : International Conference on Cycles
in Graphs in conjunction with the 27th
Annual Shanks Lectures
場所 : Vanderbilt University, アメリカ
日付 : 2012年5月30日

5. 題目 : 2-factors with bounded number of
components in claw-free graphs
会議名 : RIMS 共同研究「成分数の小さい2
因子と禁止部分グラフに関する研究」
場所 : 京都大学数理解析研究所
日付 : 2011年9月13日

6. 題目 : 2-factors and independent sets on
clawfree graphs,
会議名 : 8th French Combinatorial
Conference

場所 : University of Paris Sud, フランス,
日付 : 2010年6月29日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

善本 潔 (YOSHIMOTO, Kiyoshi)

日本大学・理工学部・准教授

研究者番号 : 90307801