様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １３ 日現在

機関番号：１０１０６
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2013
課題番号：２２５４０１６５

研究課題名（和文）複素トーラス上の定積分の研究

研究課題名（英文）Study on integrals on copmlex tori

研究代表者
渡辺　文彦（Watanabe, Humihiko）

北見工業大学・工学部・准教授

研究者番号：２０２７４４３３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,700,000円、（間接経費）　810,000円

研究成果の概要（和文）：Wiringer積分とは超幾何積分表示を楕円曲線上に持ち上げることによって生まれた4つのテータ函数の複素冪積の積分のことである．これを出発点として楕円曲線上あるいは複素トーラス上に超幾何積分の新たな一般化を考え解析を行なうための基礎的研究を行った．一般化には2つの方向性があり，ひとつは楕円曲線上の分岐点の数を4点以上にした乗法的函数の積分であり，これの満たす微分方程式を作成やこの積分とモノドロミー変形との関連を調べた．もうひとつは積分の領域を2次元アーベル曲面上で考えるものであり，テータ因子の配置のツイス（コ）トホモロジー群の構造を明らかにした．

研究成果の概要（英文）：The Wirtinger integral is obtained by lifting the Euler integral of the hypergeometric function on an elliptic curve, and is written as an integral of complex power product of four theta functions. There are two directions for generalizing the Wirtinger integral. In one direction, an ordinary differential equation satisfied by the integral of the multiplicative function on an elliptic curve with branch points more than 4 is determined, and the relation between that integral and monodromy preserving deformation theory is studied. In the other direction, the structure of twisted (co)homology groups of an abelian surface minus theta divisors, which will be the space of generalized integrals, is studied.

研究分野：解析学

科研費の分科・細目：特殊函数論

キーワード：Wirtinger 積分　テータ因子　アーベル曲面　ツイストコホモロジー　ツイストホモロジー　テータ函数　超幾何積分

1．研究開始当初の背景

青本・喜多氏の著書「超幾何関数論」(1994) にみられるように，超幾何積分の理論は複素射影空間上の超平面配置の幾何学と考えられ，ツイスト（コ）ホモロジーを調べることが基礎となり，超幾何積分のさまざまな解析的性質が調べられた．
一方 Wirtinger は超幾何函数に対するオイラーの積分表示をテータ函数の複素冪積による楕円曲線（1 次元複素トーラス）上の積分として表した(1902,1903)．以下この積分を Wirtinger 積分と呼ぶ．これは超幾何函数論を楕円函数の理論に基づく再構成の可能性のみならず，射影空間以外の多様体上の積分表示の解析学の可能性をも示唆した結果であるといえる．Wirtinger の研究は解析学の分野ではこれまで殆ど知られて来なかったようで，1903 年以降 2004 年までの間，Wirtinger の研究を直接引き継ぐ研究は，いろいろ調べてみたが私は見出していない．
2007 年の論文（プレプリントは 2004 年）H. Watanabe, Transformation relations of matrix functions associated to the hypergeometric function of Gauss under modular transformations, J. Math. Soc. Japan では，超幾何函数の接続公式の導出を従来の方法とは異なりテータ函数の周期性およびヤコビの虚数変換による別証明を与えた．2014 年の論文 H.Watanabe, On the genera transformation of the Wirtinger integral, Osaka J. Math.（プレプリントは 2008 年）では，主合同群Γ(2) の一般元に対する一般変換公式を与えた．Wirtinger の 1902 年の論文および 2007 年の私の論文では，いわゆる Wirtinger 積分は超幾何の Euler 積分表示に依存して導出されており（一次独立なものふたつ)，1 次元トーラス上 4 点分岐の複素冪積テータ函数の定積分でこれら以外に一次独立でまた別な函数を定義する積分が生じるかどうかを調べる必要がある．
2007 年の論文 H.Watanabe, Twisted homology and cohomology groups associated to the Wirtinger integral, J. Math. Soc. Japan では，Wirtinger 積分の被積分函数から出発して付随するホモロジーとコホモロジーの生成元を決定し一次独立な積分の最大個数を決定した（結果は 4 つ）．これら 4 つの積分がどのような微分方程式をみたすかを，超幾何に由来していることを忘れ上半平面上の函数としてテータ函数の公式のみを用いて再導出したのが，2009 年の論文 H. Watanabe, Linear differential relations satisfied by Wirtinger integrals, Hokkaido Math. J. である．結果は 4 つの積分がいずれも超幾何微分方程式をみたすというものである．以上 4 編の論文により古典的な超幾何函数論のテータ函数による再構築がほぼ出来たといえる．さらにここでの諸公式の導出の技法を観察すると，Wirtinger 積分（超幾何積分）の新しい一般化が可能となる．すなわち 2012 年の眞野智行氏との共著 T.Mano and H.Watanabe, Twisted cohomology and homology groups associated to the Riemann-Wirtinger integral, Proc. of the AMS.（プレプリントは 2008 年）では，2007 年の（コ）ホモロジーの私の論文の結果を一般化する形で 1 次元トーラス上一般 n 点で分岐するテータ函数の複素冪積の積分に付随する（コ）ホモロジーの研究を行い，Wirtinger 積分の分岐点を増やす一般化，これは同時に確定特異点の数が 3 より多い Fuchs 型方程式をみたす積分を過不足なく与えるための基礎定理を得た．この研究をうけて眞野氏は 1 次元トーラス上 1/3 周期点（計 9 個）のうちのいくつかで分岐するテータ冪積の積分の興味深い例をいくつか構成している（数理解析研究所講究録 1662, 2009 年)．また眞野氏の論文 T.Mano, The Riemann-Wirtinger integral and monodromy-preserving deformation on elliptic curves, IMRN (2008)ではトーラス上のモノドロミー保存変形の特殊解として一般化された Wirtinger 積分の一種が現れることが報告されている．

2．研究の目的

Wirtinger 積分を以下に述べるような 2 つの方向に一般化を目指すのが研究の目的である．
ひとつは，Wirtinger 積分が 1 次元複素トーラス上の半周期点計 4 点で分岐した多価函数の積分表示であることに着目し，分岐点を増やした積分の研究とくに分岐点が 1/N 周期点計 N^2 点である場合の積分の研究である．Wirtinger 積分や従来の超幾何函数などと類似した性質を調べる．
もうひとつは，積分表示を高次元複素トーラス（アーベル多様体）上で考えるというものであり，この研究では特に 2 次元の場合を取扱う．すなわちアーベル曲面（実は 2 次元ヤコビ多様体）上に複数のテータ因子を配置し，テータ因子に沿って無限分岐する乗法的函数の積分表示を考えその解析を行いたいのであるが，まずは局所系係数（コ）ホモロジーの構造を調べる必要がある．この研究を，将来的には Wirtinger 積分の 2 次元の場合の直接の一般化であるところの，2 次元アーベル多様体から 16 個の指標つき 2 変数テータ函数の定義するテータ因子 16 個分をのぞい

た空間上の積分に応用したい.
従来の超幾何積分論は複素射影空間における超平面配置の幾何と解釈されるが，以上の研究は非射影的多様体上の因子の配置の幾何と考えられ，この種の幾何学はアーベル多様体に限っても未開拓な部分が多く，複素射影空間の場合には現れなかった新現象が見出される可能性があるという意味で研究することに意義がある.

３．研究の方法

この研究は眞野智行氏を研究分担者とし自 2010 年度至 2013 年度の 4 ヵ年計画で行なうものである.「２．研究の目的」の前半にある，1 次元複素トーラス上の分岐点を増やす一般化の考察については眞野智之が主に担当し，後半の 2 次元アーベル曲面の一般化については渡辺が主に担当した. 研究の方法は,各自が数学図書或いは数学雑誌にて研究に必要な数学理論や関連する研究を参照しつつ独自のアイデアに基づき筆記用具にて紙の上で計算を行い得られた結果を論文化するのが基本である. この上で両者は，毎年度春と秋に実施される日本数学会のほかに，毎年度 2 度ほど京都大学, 琉球大学, 三重大学, 東京大学，北見工業大学の場を借りて研究の進捗等について研究打合せを行った. また渡辺は毎年度 2 度ほど北海道大学数学図書にて研究用図書閲覧および資料収集を行った.
2010 年度（繰越のため研究期間は 2011 年 9 月まで行った）および 2011 年度は，渡辺は 2 次元複素トーラス上のツイストホモロジー群の考察，眞野は Wirtinger 積分の 1/n 周期点への一般化のための具体例の作成およびモノドロミー保存変形との関連等の考察を行った. 2012 年度は渡辺は楕円曲線上の n 点分岐のツイストコホモロジー群の構造をスペクトル系列の手法により決定する方法を開発した. 眞野は 1/n 周期点を分岐点とする積分の満たす微分方程式を決定した. 2013 年度，渡辺は 2012 年度の手法を応用し 2 次元アーベル多様体上正規交差したテータ因子の配置に対するツイストコホモロジー群の構造を決定した. 眞野は 1/n 周期点を分岐点とする積分の満たす微分方程式の解析とパデ近似との関係を調べた. これらの結果につき，両者は直接会って議論を行い数学研究としての一定水準にあることの確認点検を行った. その他，学会や各種研究会で多くの数学研究者の前で以上の結果を報告しレビューを受けた.

４．研究成果

４－１．複素トーラス上のツイストホモロジー類の構成について

Xは 2 次元ヤコビ多様体，D_1，D_2は相異なるテータ因子とする. $M=X-(D_1\cup D_2)$とする. D_1を$\theta\bmatrix 1 \, 0 \\ 1 \, 0\endbmatrix(z_1,z_2;\tau)$の零点集合，$D_2$を$\theta\bmatrix 0 \, 1 \\ 0 \, 1\endbmatrix(z_1,z_2;\tau)$の零点集合としても一般性は失わない. $\alpha\not\in{\bm Z}$ とする. $\varepsilon=e^{\pi i\alpha}$ とおく. $T(z_1,z_2)=\theta\bmatrix 1 \, 0 \\ 1 \, 0\endbmatrix(z_1,z_2;\tau)^{\alpha}\,\theta\bmatrix 0 \, 1 \\ 0 \, 1\endbmatrix(z_1,z_2;\tau)^{-\alpha}$ とおく. $\check{\cal L}={\bm C}\cdot T(z_1,z_2)$は$M$上の局所定数層とする. このとき次が成り立つ.
<u>命題.</u>
$H_0(M,\check{\cal L})=H_1(M,\check{\cal L})=H_3(M,\check{\cal L})=H_4(M,\check{\cal L})=0$. $\dim H_2(M,\check{\cal L})=\chi(M)=6$.

以下 2 次元ツイストホモロジー類の構成.
(I) $S=\lambda_1*\lambda_3-\lambda_2*\lambda_4$とおく.
<u>補題１.</u>
$S+\lambda_1*\lambda_2-\lambda_3*\lambda_4\in Z_2(M,\check{\cal L})$であり，$H_2(M,\check{\cal L})$ の元を定義する.
(II) $D_1\cap D_2=\{p,p'\}$ とおく. $l_i\ (i=1,2)$はpからp'にむすぶD_i内の曲線とする. $l=l_1-l_2$とおく. $[l]\in H_1(X,{\bm Z})$とみなすとき$[l]=0$となるようにl_1,l_2を選べる. ゆえに，$\exists\Delta$（円板に同相）s.t. $\partial \Delta=l_1-l_2$. $\gamma_i,\ \gamma_i'\ (i=1,2)$ はD_iにおいて点pまたはp'を反時計まわりに 1 周する閉曲線. $\partial \gamma_1=(1-\varepsilon)\bullet=\partial(-\gamma_1'),\quad\partial \gamma_2=(\varepsilon-1)\bullet=\partial(-\gamma_2')$が成り立つ. Δ_1はΔの適当なレトラクト. 記号を混同し$\partial \Delta_1=l_1-l_2$ とする. $\tilde{l}_1$は ハンドル であって$\partial \tilde{l}_1=-\gamma_2'-\gamma_2+(1-\varepsilon)l_1$ を満たすもの. $\tilde{l}_2$は ハンドルであって∂

\tilde{l}_2=-\gamma_1'-\gamma_1+(\varepsilon-1)l_2$を満たすものとする．

補題２．

$\displaystyle\tilde{\Delta}=(\varepsilon-1)\Delta_1+\tilde{l}_1+\tilde{l}_2+\frac{\gamma_1*\gamma_2}{1-\varepsilon}+\frac{\gamma_1'*\gamma_2'}{\varepsilon-1}\in Z_2(M,\check{\cal L})$.これは曲線のとり方によらない．

(III)

$\lambda_1*\lambda_3,\ \lambda_2*\lambda_4$ にはそれぞれ正の向きづけを与えておく． $a,\ a'$ は D_1 または D_2 と $\lambda_1*\lambda_3$との交点．$b,\ b'$は D_1 または D_2 と $\lambda_2*\lambda_4$ との交点．$\lambda_{13},\ \lambda_{13}'$は点$a$または$a'$を中心とし正の向きに一周する $\lambda_1*\lambda_3$ 上の小円．$\lambda_{24},\ \lambda_{24}'$は点$b$または$b'$を中心とし正の向きに一周する $\lambda_2*\lambda_4$上の小円とする．

${\bm Z}$係数サイクル

$\lambda_1*\lambda_2,\ \lambda_2*\lambda_3,\ \lambda_3*\lambda_4,\ \lambda_4*\lambda_1,\ \lambda_k^{(1)},\ \lambda_k^{(2)}\quad (k=1,2,3,4)$ を $\check{\cal L}$ 係数ツイストチェインとみなす（ツイストサイクルではない）．

補題３．

以下の８つツイストサイクルのうち一次独立なツイストホモロジー類は最大４である．

\[
\begin{split}
&\sigma_{12}=-\lambda_1*\lambda_2+\lambda_1^{(1)}-\lambda_2^{(1)}-\lambda_{13}*\lambda_{24},\quad
\sigma_{12}'=\lambda_1*\lambda_2+\lambda_1^{(2)}-\lambda_2^{(2)}+\lambda_{13}'*\lambda_{24}',\\
&\sigma_{23}=-\lambda_2*\lambda_3+\lambda_2^{(1)}-\lambda_3^{(1)}+\lambda_{13}*\lambda_{24},\quad
\sigma_{23}'=\lambda_2*\lambda_3+\lambda_2^{(2)}-\lambda_3^{(2)}-\lambda_{13}'*\lambda_{24}',\\
&\sigma_{34}=-\lambda_3*\lambda_4+\lambda_3^{(1)}-\lambda_4^{(1)}-\lambda_{13}*\lambda_{24},\quad
\sigma_{34}'=\lambda_3*\lambda_4+\lambda_3^{(2)}-\lambda_4^{(2)}+\lambda_{13}'*\lambda_{24}',\\
&\sigma_{41}=-\lambda_4*\lambda_1+\lambda_4^{(1)}-\lambda_1^{(1)}+\lambda_{13}*\lambda_{24},\quad
\sigma_{41}'=\lambda_4*\lambda_1+\lambda_4^{(2)}-\lambda_1^{(2)}-\lambda_{13}'*\lambda_{24}'.
\end{split}
\]

定理．（I），（II），（III）の構成により計６個のホモロジー類が構成され，$H_2(M,\check{\cal L})$ の基底をなす．

４－２．テータ因子の配置のツイストコホモロジー

τは複素対称２次正方行列で虚部が正定値であるものとする．$X={\bm C}^2/({\bm Z}^2+\tau{\bm Z}^2)$を主偏極アーベル曲面とするとこれはヤコビ多様体であるか２つの楕円曲線の直積であるかどちらか一方なので以下Xは 2 次元ヤコビ多様体とする．$\theta_i=\theta_i(z_1,z_2;\tau),\ i=1,\ldots,N$を相異なるテータ函数，$D_i$を対応するテータ函数の相異なる零点集合とする．以下$D=\sum_iD_i$は正規交差因子であると仮定する．$M=X-D$ とおく．$\alpha_i\in{\bm C}-{\bm Z}$, $\sum_i\alpha_i=0$ とし，$T=T(z_1,z_2)=\prod_i\theta_i(z_1,z_2)^{\alpha_i}$とおく．$T$は$M$上の乗法的函数を定義していると仮定する．$\mathcal{L}$を$T(z_1,z_2)^{-1}$で定義される$M$上の局所定数層とする．$L$を${\mathcal L}$に対応する$M$上の直線束とし，$\mathcal{O}_M(L)$を$L$の切断で生成される$M$上の層とすれば，層の同型 $\mathcal{O}_M(L)\cong \mathcal{O}_M\otimes_{\bm C}\mathcal{L}$が成り立つ．直線束と接続の組$(\mathcal{O}_M(L),d)$に対する Deligne の意味での canonical extension$(\mathcal{V},\tilde{\nabla})$は，$\mathcal{V}=\mathcal{O}_X$, $\tilde{\nabla}=\nabla=d+d\log T\wedge$ なので，同型 $H^p(M,\mathcal{L})\cong{\bf H}^p(X,\Omega_X^{\bullet}\langle D \rangle,\nabla)$が成り立つ．ここで $\Omega_X^{\bullet}\langle D \rangle$は対数的 de Rham 複体，${\bf H}^p={\bf H}^p(X,\Omega_X^{\bullet}\langle D \rangle,\nabla)$はハイパーコホモロジーである．このハイパーコホモロジーに対するスペクトル系列は $E_1^{pq}=H^q(X,\Omega_X^p\langle D\rangle)$となる．次の補題が得られる．

補題．

$E_2^{02}=H^2(X,\mathcal{O}_X)$;\quad $E_2^{11}=H^1(X,\Omega_X^1\langle D\rangle)/\nabla H^1(X,\mathcal{O}_X)$;

\noindent
$E_2^{20}=H^0(X,\Omega_X^2(D))/{\bm C}\nabla(dz_1)+{\bm C}\nabla(dz_2)+\sum_{i=1}^{N-1}{\bm C}\nabla(d\log\theta_i-d\log\theta_{i+1})$. 次元はそれぞれ$1, 2N-1, N^2-N$である．その他の$E_2^{pq}$はすべて消える．この結果$E_2=E_{\infty}$.

消えないコホモロジー$H^2(M,\mathcal{L})\cong {\bf H}^2$の基底を$X$上有理型 2 形式で表示することを考える．このために次の分解を考える(Deligne).
\begin{equation}
0 \longrightarrow \Omega_X^1\langle D\rangle \longrightarrow \Omega_X^1(D)
\overset{\bar{\nabla}} \longrightarrow
\frac{\sum_{k_1+\cdots+k_N=1}\Omega_X^2
\left(\sum_{\nu=1}^N(k_{\nu}+1)D_{\nu}\right)}{\Omega_X^2(D)} \longrightarrow 0,
%\tag 1
\end{equation}
\begin{equation}
\begin{split}
0
& \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(D)
\overset{\bar{\nabla}} \longrightarrow
\frac{\sum_{k_1+\cdots+k_N=1}\Omega_X^1
\left(\sum_{\nu=1}^N(k_{\nu}+1)D_{\nu}\right)}{\Omega_X^1(D)} \\
& \overset{\bar{\nabla}} \longrightarrow
\frac{\sum_{k_1+\cdots+k_N=2}\Omega_X^2
\left(\sum_{\nu=1}^N(k_{\nu}+1)D_{\nu}\right)}{\sum_{k_1+\cdots+k_N=1}\Omega_X^2\left(\sum_{\nu=1}^N(k_{\nu}+1)D_{\nu}\right)}
\longrightarrow 0.
\end{split}
\end{equation}

\noindent
ただし$k_1,\cdots,k_N$は 0 以上の整数．以下 $H^{\bullet}(X,*)$ を$H^{\bullet}(*)$と書く．このとき

定理.
E_{\infty}^{20}, E_{\infty}^{11}, E_{\infty}^{02} を有理型 2 形式のなすベクトル空間の適当な商空間として表示することが可能.

※以上の研究結果の詳細は https://sites.google.com/site/watanabehumihikonopeji/
に掲載中.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 2 件）
(1)T. Mano, On a generalization of Wirtingers integral, Kyushu J. Math., 66(2012), 435-447.
(2)H. Watanabe, Twisted cohomology of a punctured complex torus, preprint.

〔学会発表〕（計 6 件）
(1)眞野智行: ガルニエ系の解の行列式公式とパデ近似, 日本数学会 2011 年秋季総合分科会．(20110930)．信州大学
(2)渡辺文彦: 種数 2 の Jacobi 多様体上の定積分に付随するツイストホモロジー類の構成について, 日本数学会 2011 年秋季総合分科会．(20110930)．信州大学
(3)渡辺文彦: 2 次元複素トーラス上のツイストホモロジー類の構成について, 研究集会「ボレル総和法と接続問題」．(20120307)．広島大学理学部
(4)渡辺文彦：複素トーラス上のツイストサイクルの構成について, 函数方程式論サマーセミナー(20120809)山形市 KKR 蔵王
(5)渡辺文彦：テータ因子の配置のツイストコホモロジー, 日本数学会 2013 年度秋季総合分科会(20130927)愛媛大学
(6)眞野智之：有理関数近似の双対性と schlesinger 変換の構成について, 研究会「有理函数が繋ぐ可積分系・直交多項式・パンルヴェ方程式」(20140131)一橋大学

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：

番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
https://sites.google.com/site/watanabeh
umihikonopeji/

６．研究組織
(1)研究代表者
渡辺 文彦（WATANABE, Humihiko）
北見工業大学・工学部・准教授
研究者番号：20274433

(2)研究分担者
眞野 智之（MANO, Toshiyuki）
琉球大学・理学部・准教授
研究者番号：60378594

(3)連携研究者
鈴木 範男（SUZUKI, Norio）
北見工業大学・工学部・准教授
研究者番号：80211986

山田 浩嗣（YAMADA, Hiroshi）
北見工業大学・工学部・教授
研究者番号：50210472