様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年５月２７日現在

機関番号：１２１０１
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：２０１０　～　２０１２
課題番号：２２５４０１７０
研究課題名（和文）人口動態論に由来する吸収爆発混合型の非線形楕円型境界値問題の分岐解析

研究課題名（英文）Bifurcation analysis for nonlinear elliptic boundary value problems with combined nonlinearity of absorption and blowing up effects arising in population dynamics

研究代表者
梅津　健一郎　（UMEZU　Kenichiro）
茨城大学・教育学部・教授
研究者番号：00295453

研究成果の概要（和文）：人口動態論に由来する非線形楕円型方程式，いわゆる拡散効果を加味したロジスティック方程式を非線形境界条件のもとで考察した．内包するパラメータと解空間の直積空間において，正値解から成る連続体分岐枝の大域的な存在を示し，パラメータ依存した分岐枝の漸近挙動を研究した．ロジスティック非線形項が示す吸収型非線形性，境界条件に現れる爆発型非線形性，そして方程式に内包する空間依存した符号不定な係数の相互作用が分岐枝の大域的挙動を分類した．

研究成果の概要（英文）：In this study, we consider the existence of positive solutions of nonlinear elliptic problems with nonlinear boundary conditions arising in population dynamics, by means of bifurcation analysis. The nonlinearity shows logistic nonlinearity combined with the power nonlinearity which means the incoming flux of population on the boundary. We determine the global behavior of bifurcation components of the positive solutions according to values of a parameter, and by this, we can also discuss the uniqueness and multiplicity of the positive solutions in some range of the parameter. The spatial heterogeneity of the indefinite coefficient equipped with the problem plays an important role.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	900,000	270,000	1,170,000
２０１１年度	600,000	180,000	780,000
２０１２年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総　計	2,000,000	600,000	2,600,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：関数方程式，非線形楕円型境界値問題，非線形境界条件，人口動態論

１．研究開始当初の背景

(1) 滑らかな有界領域における，非線形境界条件を伴い吸収爆発混合型の非線形性を持つ非線形楕円型境界値問題の正値解の研究は Chipot, Fila and Quittner(1991), Lopez-Gomez, Marquez and Wolanski

(1993) に端を発する．

(2) 本研究のきっかけとなったロジスティック非線形反応項と爆発型非線形境界条件による混合型非線形性の研究は，Rossi, Suarez らにより 2005-2009 にかけてなされた．彼らはロジスティック反応項に付随する係数が正定数の場合を考察している．人口動態論的にはこれは初期成長率を意味する．正値解の存在を，主として，分岐理論を用いて示した．正値解の分岐枝について，パラメータと解空間の直積空間における大域的挙動を，係数の場合分けによって詳細に分類している．自明な枝からの分岐解について分岐点近傍を解析すると共に正値解の先験的有界性を確立して遠方における考察も行っている．また，解の非存在，解の安定性の議論においては，係数が定数であること，すなわち定符号であることを本質的に用いて精密に行っている．

(3) 研究代表者 (K.Umezu) はこれより先に 2002-2004 にかけて，ロジスティック反応項－爆発型非線形境界条件に対する正値解の考察を局所分岐理論を駆使して行っている．そこでは，係数は人口動態論からの要請により，変係数でしかも符号不定関数である．問題の困難さから分岐点の近くの分岐解の構造を調べるにとどまった．符号不定関数の平均の符号によって分岐解のタイプを詳細に分類した．しかしながら，係数の符号不定性のため，方程式の解に対する比較原理を構築することが困難であり，分岐枝の大域的な構造を充分に考察するに至らなかった．

(4) また並行して，研究代表者は分岐解の分岐点の考察も進めている．符号不定係数に分岐点がどのように依存するかを調べた．先に Cantrell and Cosner (1989) がディリシレ境界条件のもとで同じ考察を行っていた．そこで，ノイマン境界条件とロバン境界条件の場合に先行結果と同様の結果が得られるかを研究した．結果としてはノイマン，ロバン境界条件に特有の現象が現れることを示した．

２．研究の目的

(1) 考える方程式に含まれる係数は人口動態論的見地から初期成長率(initial growth rate)を表す．従って，領域に関して係数の符号不定性を課すことは自然な要請である．しかしながら，解析的には符号不定性は比較原理や解の安定性を議論する場合に大きな困難を引き起こす．本研究ではその困難さを克服するための方法を確立して，正値解からなる分岐枝(subcontinua)の大域的構造を方程式に含まれるパラメータの変化に応じて解析する．特に研究代表者がすでに考察した局所分岐解の大域的な解明を行う．人口動態論的見地から，定数係数の場合には見られない種の条件的生存のタイプを明らかにする．分岐点の存在について，符号不定係数の場合の特徴的な結果を研究代表者がすでに示している．これは Brown-Lin(1980), Afrouzi- Brown(1999)の考察に従っている．実際，自明解の安定性が切り替わるパラメータ値に関して，定数係数の場合とはその現れ方が異なっていることを示した．この自明解の安定性の考察から正値解の安定性（種の生存）の議論を展開したい．

(2) 我々の扱う非線形性は吸収爆発混合型である．これに対する非線形境界値問題は一般に順序性を持たないため，逐次近似的な解の構成は難しい．正値解の集合に与える変係数の効果に考察の焦点を絞るために境界条件の非線形性（未知関数に関する増大性）にある仮定を課す．つまり，ロジスティック非線形項と同一の次数を境界条件のベキ型非線形性に与える．この仮定に助けを借りて精密な議論を行い，先行研究で得られた定数係数（定符号係数）の場合の結果を拡張する．抽象的な分岐理論に加えて，有限次元空間の分岐方程式への問題の帰着，さらにエネルギー法に基づく正値解の一意性の考察を行い，分岐解の大域的挙動を特徴付ける．

３．研究の方法

(1) ロジスティック非線形性をもつ非線形楕円型境界値問題を線形境界条件のもとで考察するとき，正値解の存在に対しては逐次近似，優界劣解による解の構成がうまく働いた．これはある種の順序性が成り立つためである．しかし本研究で扱う爆発型非線形境界条件のもとではその順序性が壊れる．そのため，正値解の存在に対しては分岐解析を用いる．自明な解の枝からの非自明解の分岐を示すというアプローチである．

(2) 分岐解析においては局所及び大域的分岐理論の一般論の適用可能性をまず検証する．さらに分岐点の近傍における分岐解の振る舞い，つまり分岐解の分岐点からの微小挙動を詳細に解析する．加えて分岐理論の仮定である横断条件を満たさない場合について分岐解の存在と挙動について論じる．これらの考察は Lyapunov-Schmidt の方法により，与えられた境界値問題を有限次元空間における分岐方程式に帰着させることによって行う．分岐方程式に現れる多変数関数を自明解の回りで級数展開して，その高次の項を調べる．その際，陰関数定理，Morse の補題を援用する．

(3) 分岐枝の大域的な構造の決定において，分岐枝が折り返し点を持つか否かという問題は重要である．折り返しを持たない十分条件，持つための十分条件，より厳密に折り返し点を持つための必要十分条件を与える．パラメータ領域において折り返し点を持た

ないことを示すのに，陰関数定理の適用を試みる．ところが順序性の欠如から定理の適用範囲が正値解の大きさによって制限される．そのため必然的に解の先験的評価の研究が発生する．他方，折り返し点の存在については呼応する時間発展方程式の爆発解を援用する．爆発解の援用には，非線形放物型方程式の比較原理に基づいて初期値の選択が本質的になる．そのため，考察対象の非線形楕円型方程式の正値解に対する先験的評価，特に下からの評価を導出する．これにはある種の特異摂動解析を行う．

(4) 正値解の分岐枝の遠方における解析に対しては次の２つのアプローチを主に行う．

(a) 正値解の先験的有界性を確立することによって，無限遠点からの分岐が起こるパラメータ値を特定する．そのために未知関数に関するある不変関係式を導出する．

(b) パラメータに関するある種の相似変換を施して，分岐枝の遠方における挙動の考察を自明な枝からの局所分岐のそれに帰着させる．これにより無限遠点からの分岐の様子を精密に記述する．すなわちパラメータに関する正値解の増大次数を評価する．

４．研究成果

(1) 無限遠点からの分岐枝のパラメータに関する増大次数を決定した．分岐点近傍の分岐解をパラメータに関して級数展開したとき，その係数を方程式に内包する係数，領域の体積，境界の面積を用いて高次の項まで厳密に与えた．これにより，漸近挙動の考察に加えて，無限遠点からの分岐が起こる分岐点の近傍において，正値解の一意性と安定性を論じることができた．

(2) 初期成長率の平均の符号により，3 種の大域的分岐枝の構造を決定した．分岐点から劣臨界的に分岐する場合と優臨界的に分岐する場合についてそれぞれ結果を得た．

(a) 劣臨界的分岐の場合：折り返し点を持たない場合を考察した．劣臨界的に分岐した枝がもうひとつの自明解の枝の近くで振る舞う挙動の型を決定した．分類定理は方程式の係数，領域の体積，境界の面積で条件を与えた．

分岐枝が折り返し点を持つ非線形境界条件の具体例はすでに研究代表者によって与えられている．より一般的な考察は未だ充分とはいえない．

(b) 優臨界的分岐の場合：分岐枝が折り返し点を持つための十分条件を与えた．これは定数係数の場合で得られた Suarez らによる結果の部分的な一般化である．爆発型の非線形境界条件から，十分条件を得るためには境界における係数の正値性がキーであった．当初得られた十分条件は，係数に対して境界のあるチューブ型近傍における正値性を課すというものであった．その後の発展的な考察，すなわち時間発展方程式の爆発解を援用する考察により，ある境界点の近傍での正値性で十分であることを示した．すなわち係数が境界の近傍において非負であるが部分的に退化することを許した．

この条件を補完するように，境界上で係数が完全に退化するならば，折り返し点を持たず分岐枝はパラメータ領域において大域的に延長可能であるという予想を立てた．陰関数定理を主として用いてこの問題に取り組んだ．しかしながら十分な結果は得られなかった．この考察は，目的のためには係数に付加条件が必要であることを示唆した．今後の研究課題としたい．

(3) 変係数の平均値が退化する場合の考察は一般に難しい．いわゆる Crandall-Rabinowitz の横断条件が壊れる場合であり，局所及び大域的分岐の一般論が直接適用できない．そこで，まず非退化の場合の大域的分岐枝を構成して，それの退化型への極限操作によって分岐枝の大域的挙動を決定した．そこでは Whyburn による位相解析的手法を用いた．この位相解析的手法をあるスケール変換後の問題に適用した．

本考察の本質的な部分は得られた分岐枝を元の問題に戻したときに，やはり退化しないこと，つまり縮んで消滅しないことを検証することにあった．実際，先に行った自明解の枝からの分岐解に対する局所解析の精密な議論のおかげで，当初の予想した形の大域的構造を得ることができた．当初の予想は研究代表者によって得られていた局所分岐解の存在に依っている．小さい正値解の枝と大きい正値解の枝の 2 種の局所解の存在を得ていた．本結果はこれら 2 種の枝を連続的に接続する連続体(subcontinua)の存在を，正値解の集合として，示すものである．

(4) 本研究に関連して，今後の課題を 2 点以下のとおり挙げる．

(a) 折り返し点を持つための十分条件の考察では，変係数の境界近傍における正値性が重要であることがわかった．一様に正値である必要はなく，ある境界点の近傍で正値であればよく，退化することも許される．では係数が境界付近で符号変化する場合にはどのような結果が予想できるか？この場合，対応する初期境界値問題の爆発解を仮定しても，境界における爆発は無条件に期待できない．境界付近で符号変化する係数は，人口動態論的に言えば，種の淘汰と成長が場所ごとに変わることを意味する．つまり境界の環境要因が不定(indefinite)であることを記述する．応用面からの要請としては自然である．他方，爆発型非線形境界条件との混合性はより複雑であり数学的に興味深い．

(b) 分岐枝が折り返し点を持たず際限なくパラメータ領域において延長可能であるための十分条件を考察することは，本研究成果を補完するものとして重要である．これを確立するのに陰関数定理は強力な道具である．しかしこの定理は非線形性にある種の単調性を必要とするため直接の適用は困難と言える．この困難さは混合型非線形性に起因する．折り返し点を持たないことを示す状況証拠として，任意のパラメータ値について正値解の存在が確証されれば興味深い．この大域的存在が確立されれば，最小正値解の存在と安定性の議論を通じて，あらゆる環境下において種の安定的生存が保証される．つまり個体数爆発が起こらないことが確かめられる．

(5) 本研究の成果は 4 件の招待講演（内 2 件は国際会議のスペシャルセッションにおけるもの）によって口頭発表された．また，国際専門学術誌において論文 1 件が出版され，もう 1 件の論文も受理済みである（2013 年 5 月 27 日現在).

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① K.Umezu, Bifurcation approach to a logistic elliptic equation with a homogeneous incoming flux boundary condition, J. Differential Equations, 252, (2012), 1146-1168, 査読有. doi:10.1016/j.jde.2011.08.043

② K.Umezu, Global bifurcation results for semilinear elliptic boundary value problems with indefinite weights and nonlinear boundary conditions, Nonlinear Differential Equations Appl. NoDEA, 17(3), (2010), 323-336, 査読有. doi:10.1007/s00030-010-0056-3

③ K.Umezu, Blowing-up properties of the positive principal eigenvalue for indefinite Robin-type boundary conditions, Rocky Mountain J. Math., 40(2), (2010), 673-694, 査読有. doi:10.1216/RMJ-2010-40-2-673

〔学会発表〕（計４件）

① K.Umezu, On the effect of spatial heterogeneity in logistic type elliptic equations with nonlinear boundary conditions, The 9th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Orlando, Florida, USA, 2012.7.4.

② 梅津健一郎, ロジスティックタイプの非線形楕円型境界値問題に対する正値解の大域的分岐構造について, 変分問題セミナー, 首都大学東京, 2012.3.9.

③ K.Umezu, Global bifurcation of positive solutions for some elliptic problems with nonlinear boundary conditions, 洞爺解析セミナー, 洞爺山水ホテル和風, 北海道洞爺湖温泉町, 2010.9.28.

④ K.Umezu, Bifurcation analysis for indefinite weight boundary value problems with nonlinear boundary conditions, The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Dresden University of Technology, Dresden, Germany, 2010.5.27.

６．研究組織

(1)研究代表者

梅津　健一郎 (UMEZU KENICHIRO)
茨城大学・教育学部・教授
研究者番号：00295453