

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 3 月 31 日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540178

研究課題名（和文） バナッハ環における保存問題の研究

研究課題名（英文） Study on preserver problems on Banach algebras

研究代表者

羽鳥 理 (Osamu Hatori)

新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号：70156363

研究成果の概要（和文）：本研究でバナッハ環の一般線形群の間の距離を保存する写像の構造を決定した。その応用として C^* 環の一般線形群の間の距離を保存する写像の形を決定した。また Mazur-Ulam の定理の非可換化を行いこの応用としてヒルベルト空間上のユニタリー群の間の等距離写像の形を決定した。また、ある種の可換バナッハ環の間のノルムを非対称に保存する写像についての知見を得た。さらに解析関数からなる F 多元環の間の積を保存する等距離写像の形を決定した。

研究成果の概要（英文）：We give a structure theorem for isometries between the general linear groups of Banach algebras. As an application of it, we deduce the form of isometries between the general linear group of C^* -algebras. We get a non-commutative Mazur-Ulam theorem and we describe the form of isometries between the full unitary group of a Hilbert space. We also get a result on the maps between certain commutative Banach algebras which preserve the norm non-symmetrically. We describe the form of the multiplicative isometries between F -algebras of holomorphic functions.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
2012年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：基礎解析学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析

キーワード：バナッハ環、 C^* 環、等距離写像、代数構造

1. 研究開始当初の背景

バナッハ環の間の写像が与えられた構造（例えば距離構造、多元環としての構造など）を保存するとき、その写像は他のどのような構造や或いは集合（可逆元全体、べき等元全体など）を保存するかを決定すること、さらにはそのような写像の一般形を決定することが保存問題における課題である。例えば

幾何学ではある変換群のもとでの不変量の研究が基本的であるように、バナッハ環理論における保存問題も数学の多分野にわたる基本的な問題意識に基づくものであることはいままでもない。バナッハ環の幾何構造或いは位相構造と代数構造の関係がバナッハ環の定義における見かけのもの以上に本質的に深いことは早くから認識されていて、幾

何構造と代数構造の親和性の研究は関数解析勃興期にバナッハ自身により既に始まっていたともいえる。バナッハ環においてはこのような現象がさらに顕著である。Banach-Stone の定理は、可換 C^* -環のバナッハ空間の構造はバナッハ環としての構造を決定することを述べている定理でありバナッハ環における線形写像に対する保存問題に対する古典的な結果としてよく知られている。また、バナッハ環上の線形写像の乗法性の研究は 19 世紀の Frobenius の定理にまでさかのぼることができ、Kaplansky 問題の原点ともいえる。一方線形性を仮定しない写像についての研究は 50 年以上前の Hua の研究など古くからあり、Gleason-Kahane-Zelazko の定理の拡張である Kowalski-Slodkowski の定理もよく知られていて、この 20 年ぐらいのあいだに急速に発展してきているとはいえ線形写像の乗法性の研究に比してまだ未開拓の部分が多い。そのような中で乗法的にスペクトルを保存する写像の研究は Molnar により開始された。バナッハ環からバナッハ環への写像 T で任意の f と g に対して、 $T(f)T(g)$ のスペクトルと fg のスペクトルが一致するとき T は乗法的にスペクトルを保存する写像と呼ばれる。Molnar の研究を受けて本研究代表者と分担者の三浦と高木は関数環の間の上へ乗法的に値域を保存する写像に対して Molnar の定理を一般化した結果を得た。更に単位的半単純可換バナッハ環上の写像の場合に結果を拡張した。Luttman-Tonev の抹消スペクトルを乗法的に保存する写像の研究を受けて、本研究代表者と分担者の三浦、高木は非対称に乗法的に距離を保存する写像（任意の f, g に対して $\|T(f)T(g)-1\|=\|fg-1\|$ をみたす写像 T のこと）の研究を始めていくつかの新たな知見を得た。また写像 T の定義域と値域とを可逆元のなす群にとり、 $\|\{T(f)/T(g)-1\|=\|f/g-1\|$ を考えることによりより一般的な場合を扱うことができることが本研究代表者や分担者の一部（三浦）等の研究により分かってきた。この等式を、単位的 C^* -環 A の可逆な正要素全体 G_+ においては考えれば Thompson 距離を保存することを意味している。Thompson 距離は G_+ における自然な Finsler 幾何構造に対応する測地距離をと一致しているので Thompson 等距離写像を調べることは、quantum system の理論や Lagrangian 幾何への寄与を期待できると考えられる。Molnar は最近の論文で 4 次元以上の（無限次元も含めて）Hilbert 空間上の有界線形作用素全体の C^* -環の場合の Thompson 距離保存写像を決定した。本研究代表者と分担者の一部（三浦）等は、可換 C^* -環の場合に Thompson 距離を保存する写像の構造を決定した。

Banach-Stone の定理は関数環の場合には Nagasawa により一般化され、さらに Jarosz による一連の研究によりバナッハ環の場合が扱われている。しかしながら、単位的半単純可換バナッハ環ですらその多元環としての構造はバナッハ空間としての構造だけでは決まらないという決定的な事実があるため Jarosz の研究以降は大きな進展が見られなかった。このような中で本研究代表者は単位的可換バナッハ環の群の距離空間としての構造がそのバナッハ環の実バナッハ環としての構造を決定していることを発見し、Banach-Stone の定理の拡張の新たな方向性を打ち出した。

2. 研究の目的

本研究では、バナッハ環やその群など関係する重要な集合の間の写像が距離やスペクトル、ノルム、スペクトル半径、値域の直径等の位相的な量を保存する場合の保存問題を組織的に解決していくこと、たとえばそのような写像が同時にどのような集合を保存するのかとか或いは線形性や乗法性などの代数構造を有するのかという現象を研究し該当する写像を完全に記述すること、さらに新たな問題を提示しスペクトルや各種距離をはじめとする位相的な量を保存する写像の代数構造の研究を推進していくことを目的とする。バナッハ空間の位相的性質と代数的性質の親和性については関数解析学勃興期から良く知られたが、親和性の根本が完全に理解されているとはいいがたいのが現状である。本研究テーマはバナッハ環理論における基本的かつ古典的な研究対象に根ざしたものである。

3. 研究の方法

距離付可能な位相群をはじめとした群や代数的な構造を有する距離空間における等距離写像に対する非可換 Mazur-Ulam の定理を示し、それを活用して単位的 C^* -環の可逆な正要素全体に対する Molnar の定理とその可換版である本研究代表者等の結果をより広いバナッハ環のクラスに対して成り立つことを示すことをもってバナッハ環の部分構造の間の等距離写像の代数構造についての統一的な理論を構築する。また、単位的バナッハ環の群やその開部分群の間の等距離写像の代数構造を調べる。その際に本研究代表者が分担者である他の基盤研究 (C) の研究成果を十分に活用して行う。また、関数解析関係の書物や資料の活用を十分に行い、研究打ち合わせを綿密に行うことにより研究成果をあげたい。

4. 研究成果

単位的可換バナッハ環の間のスペクトル半径を「和的に」保存する全射についてその形を完全に決定した。その際に極大イデアル空間の間の線形荷重合成作用素と共役線形荷重合成作用素の部分に分けて記述されることを示した。これは単位的可換 C^* -環の間の線形全射等距離写像に関する Banach-Stone の定理を含む結果である。また、単位的バナッハ環の可逆元全体からなる群の開部分群の間の全射等距離写像について、それは与えられたバナッハ環の間の全射実線形等距離写像をラディカル要素平行移動したものに一意的に拡張できることを示した。一般に単位的半単純可換バナッハ環の間の単位的複素線形等距離全射は乗法的とは限らない、つまりバナッハ空間として同形であっても積の構造を含めての同型性はまったくいえないことは良く知られている。この中で上記結果を用いると次が分かる：単位的半単純可換バナッハ環の可逆元全体の群の開部分群間の全射等距離写像は与えられたバナッハ環の間の全射等距離実多元環同形写像にユニタリー元をかけたものになる。つまり単位的半単純可換バナッハ環の群の開部分群が距離空間として同形ならば、与えられたバナッハ環は実バナッハ環として同形であることがいえる。バナッハ環が非可換の場合は、状況は複雑であることが十分に予想できるが、対象とする標準的作用素環 (standard operator algebras) の場合には可逆元全体の群の開部分群の間の等距離写像の一般形を記述することができた。また、関数環の間の乗法的にスペクトル、ノルムなどを保存する写像の研究においていくつかの知見が得られた。Mazur-Ulam の定理は距離構造の和の構造への影響について述べた定理であるが、これを距離群の場合に転進した。その際に inverted Jordan product を定義した。距離群では代数的中点は一意に定めがたくそこで代数的中点が等距離写像により保たれるという主張の Mazur-Ulam の定理に対して inverted Jordan product が保たれることを示した。今後この定理の応用が順次示されていくと思われる。単位的バナッハ環の可逆元全体からなる群の開部分群の間の等距離写像の形を決定した結果を用いて、懸案であった単位的 C^* -環の場合に可逆元全体からなる群の開部分群の間の等距離写像が中心射影とジョルダン*同形写像を用いて完全に記述した。特に与えられる C^* -環がヒルベルト空間上の有界線形作用素全体からなるバナッハ環の場合にはその形をユニタリー変換を用いて記述した。また C^* -環のユニタリー群の間の等距離写像についてもヒルベルト空間上の有界線形作用素全体からなるバ

ナッハ環の場合にはその構造を決定できてきた。さらにその際に用いられた解析的な方法を適用することにより正值可逆作用素全体間の Thompson 等距離写像についてその記述をできることとその応用についての展望を開いた。局所コンパクト群の同形性をその上の環により記述する問題については、局所コンパクト可換群上の測度環の可逆測度全体が等距離であれば与えられた局所コンパクト可換群は同相同形であることが示された。また球や多重円板で定義された正則関数からなるある種の F -多元環の間の乗法的等距離写像の形を決定した。超鏡映的距離空間の間の距離保存写像についての結果をまとめた。さらに関数環の間に定義された乗法的にスペクトルを保存する写像とその一般化について、特に弱乗法的に抹消スペクトルを保存する写像について弱い仮定のもとで、その形を決定した。等距離写像についてその歴史は 1930 年代の Banach-Stone の定理にまでさかのぼることができるが現在に至るまで対象となる空間が線形構造をもったものについて多くの研究がなされてきた。このような中で Mazur-Ulam の定理の非可換化に成功することによりバナッハ環の線形とは限らない部分構造間の等距離写像についてその形を決めることができるようになってきた。たとえば単位的 C^* -環のユニタリー群の間の等距離写像について一般の場合についてその形を決定することに展望を開いた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 24 件)

① Osamu Hatori, Go Hirasawa, and Takeshi Miura, Additively spectral-radius preserving surjections between unital semisimple commutative Banach algebras, Cent. Eur. J. Math. 査読有, vol. 8, 2010, 597-601

② Osamu Hatori, Algebraic properties of isometries between groups of invertible elements in Banach algebras, J. Math. Anal. Appl. 査読有, vol. 376, 2011, 84-93

③ Osamu Hatori, Scott Lambert, Aaron Luttmann, Takeshi Miura, Thomas Tonev and Rebekah Yates, Spectral preservers in commutative Banach algebras, Contemp. Math. 査読有, vol. 547, 2011, 103-123

④ Hiroyuki Takagi, Hironao Koshimizu and Hiroaki Ariizumi, Backward shifts on function algebras, J. Math. Anal. Appl. 査読有, vol. 377, 2011, 135-144

⑤ Osamu Hatori and Yasuo Iida,

Multiplicative isometries on the Smirnov class, Cent. Eur. J. Math. 査読有, vol.9, 2011, 1051-1056

⑥ Tatsuya Koizumi and Keiichi Watanabe, On best possibility of an extension of Furuta inequality, Int. J. Funct. Anal. Oper. Theory Appl. 査読有, vol.3, 2011, 155-161

⑦ Kei Ji Izuchi, Kou Hei Izuchi and Yuko Izuchi, Ranks of invariant subspaces of the Hardy space over the bidisk, J. Reine Angew. Math. 査読有, vol.659, 2011, 101-139

⑧ Hiroyasu Mizuguchi and Kichi-Suke Saito, Some geometrical constants of absolute normalized norms on \mathbb{R}^2 , Ann. Funct. Anal. 査読有, vol.2, 2011, 22-33

⑨ Osamu Hatori, Kiyotaka Kobayashi, Takeshi Miura, Sin-Ei Takahasi, Reflections and a generalization of the Mazur-Ulam theorem, Rocky Mountain J. Math. 査読有, vol.42, 2012, 117-150

⑩ Osamu Hatori, Yasuo Iida, Stevó Stevic and Sei-Ichiro Ueki, Multiplicative isometries on F-algebras of holomorphic functions, Abstr. Appl. Anal. 査読有, 2012, Art. ID 125987, 16pp

⑪ Osamu Hatori and Lajos Molnar, Isometries of the unitary group, Proc. Amer. Math. Soc. 査読有, vol.140, 2012, 2127-2140

⑫ Osamu Hatori, New criteria for equivalence of locally compact abelian groups, J. Group Theory 査読有, vol.15, 2012, 271-277

⑬ Osamu Hatori and Keiichi Watanabe, Isometries between groups of invertible elements in C^* -algebras, Studia Math. 査読有, vol.209, 2012, 103-106

⑭ Tatsuya Koizumi and Keiichi Watanabe, A remark on extension of order preserving operator inequality, J. Math. Inequal. 査読有, vol.6, 2012, 119-124

⑮ Osamu Hatori, Go Hirasawa, Takeshi Miura and Lajos Molnar, Isometries and maps compatible with inverted Jordan triple products, Tokyo J. Math. 査読有, vol.35, 2012, 385-410

⑯ Takeshi Miura, Sin-Ei Takahasi, Takahiro Hayata and Kotaro Tanahashi, Stability of the Banach space valued Chebyshev differential equation, Appl. Math. Lett. 査読有, vol.25, 2012, 1976-1979

⑰ Takeshi Miura, Go Hirasawa and Takahiro Hayata, A note on the stability

of an integral equation, Funct. Equ. Math. Anal. 査読有, vol.52, 2012, 207-222

⑱ Keiichi Watanabe, On a simple range of parameters of the grand Furuta inequality, Int. Math. Forum 査読有, vol.7, 2012, 2897-2902

⑲ Hiroyoshi Mizuguchi and Kichi-Suke Saito, The Dunkl-Williams constant of symmetric octagonal norms on \mathbb{R}^2 , Nihonkai Math. J. 査読有, vol.23, 2012, 93-113

⑳ Kei Ji Izuchi, Dieu Quang and Shuichi Ohno, Composition operators induced by analytic maps to the polydisk, Canad. J. Math. 査読有, vol.64, 2012, 1329-1340

㉑ Tatsuya Koizumi and Keiichi Watanabe, Another consequence of Tanahashi's argument on best possibility of the grand Furuta inequality, Cent. Eur. J. Math. 査読有, vol.11, 2013, 368-375

[学会発表] (計8件)

① Takashi Miura, Generalizations of spectrally multiplicative surjections between uniform algebras, The sixth Conference on Function Spaces, 招待講演, Southern Illinois University at Edwardsville, USA May 18, 2010

② Osamu Hatori, Algebraic structures of isometries on groups, The sixth Conference on Function Spaces, 招待講演, Southern Illinois University at Edwardsville, USA May 19, 2010

③ Kichi-Suke Saito, How to calculate the geometrical constants of Banach spaces, The seventh International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 招待講演, Pukyong National University, Busan Korea, August 3, 2011

④ 泉池 敬司, Gleason部分に関する H^∞ の閉イデアルの構造, 第50回実函数論・函数解析学合同シンポジウム, 招待講演, 2011年8月9日, 東京女子大学

⑤ Osamu Hatori, Isometries on groups and its applications, Department of Mathematical Sciences, Colloquium Series, 招待講演, University of Montana, USA, May 10, 2012

⑥ Takashi Miura, Surjective isometries between function spaces, Colloquium Series, 招待講演, University of Montana, USA, May 11, 2012

⑦ Takashi Miura, Surjective isometries between function algebras, International Conference on Mathematics and Statics, 招待講演, Univ. Memphis, USA, May 15, 2012

⑧ Osamu Hatori, Isometries on the unitary groups, International Conference

on Mathematics and Statics, 招待講演,
Univ. Memphis, USA, May 16, 2012

6. 研究組織

(1) 研究代表者

羽鳥 理 (Hatori Osamu)
新潟大学・自然科学系・教授
研究者番号：70156363

(2) 研究分担者

三浦 毅 (Miura Takeshi)
山形大学・理工学研究科・教授
研究者番号：90333989

高木 啓行 (Hiroyuki Takagi)
信州大学・理学部・教授
研究者番号：20206725

泉池 敬司 (Izuchi Keiji)
新潟大学・自然科学系・教授
研究者番号：80120963

斎藤 吉助 (Saito Kichisuke)
新潟大学・自然科学系・教授
研究者番号：30018949

渡邊 恵一 (Watanabe Keiichi)
新潟大学・自然科学系・准教授
研究者番号：50210894