

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 21 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540180

研究課題名(和文) 超可積分系の特異点における標準形とその摂動問題

研究課題名(英文) Normal forms for superintegrable systems at singular points and their perturbation problems

研究代表者

伊藤 秀一 (Ito, Hidekazu)

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号：90159905

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円、(間接経費) 990,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は自由度よりも多くの第一積分をもつ超可積分系と呼ばれる系の解の大域的構造の理解をめざしたものであり、第一積分のつくる写像の特異点集合の近傍でも、共鳴条件に関する付加条件のもとで「解ける座標」が得られることを示し、可積分系に対する基本定理であるリウビル-アーノルドの定理を一般化した。また、ハミルトン系とは限らない一般のベクトル場についても超可積分性を定義し、ある種のタイプの平衡点近傍ではその標準形を求めることによって、解が求まることを示した。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this research is to understand the global structure of solutions for the so-called superintegrable systems admitting integrals the number of which is greater than the degrees of freedom. We generalized Liouville-Arnold theorem which is the fundamental theorem for integrable systems. Namely, under some additional conditions on resonances, we showed the existence of special coordinates in a neighbourhood of singularities of the map defined by those integrals so that the system can be solved explicitly in those coordinates.

Moreover, we defined superintegrability for general vector fields and showed that such a superintegrable vector field can be solved explicitly in a neighbourhood of some type of equilibrium point by obtaining its convergent normal form.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：超可積分系 ハミルトン系 パーコフ標準形 共鳴条件 標準形理論

1. 研究開始当初の背景

可積分ハミルトン系は十分な個数の第一積分の存在によって規定され、それ自身興味深い研究対象であるとともに、摂動論の出発点を与えるという意味でも重要である。しかし、その基本定理であるリウビル-アーノルドの定理はそれら第一積分のつくるモーメント写像の特異点の近傍での解構造については何も主張しないため、解の大域構造を理解するためには、特異点近傍における解の挙動を明らかにすることが重要になる。これはまた、摂動論への応用の観点からも重要である。

このような特異点近傍における解の挙動を調べるための基本的道具はバーコフ標準形である。これはハミルトン力学系研究のための基本ツールといえるものであり、可積分系研究にとっては収束バーコフ標準化の問題が重要である。これについては、解析的な可積分系において非共鳴平衡点における収束バーコフ標準化を示した本研究代表者による古典的結果があるが、2005年にN. T. Zungは一般の共鳴平衡点においてもそのような収束バーコフ標準化ができることを示した。しかしながら、このときのバーコフ標準形は一般に求積可能性を意味せず、解構造の解明とは大きな隔りがある。

共鳴平衡点においても求積可能なバーコフ標準形を得ることをめざして、本研究代表者は、本研究開始に先立ち、ハミルトンベクトル場がその共鳴平衡点の近傍において、共鳴度に釣り合うだけの個数の第一積分をもつならば、そのベクトル場は収束バーコフ標準化ができることを示し、その結果を上記のハミルトン系の特異点近傍での解構造の研究に応用する研究を始めていた。本研究では、それをさらに発展させるとともに、その摂動問題の新たな展開をめざしたものである。

2. 研究の目的

本研究の目的は、可積分系を十分な個数の第一積分の存在によって捉え、それら第一積分のつくる写像の特異点近傍における解の様相と、その摂動に対する安定性・不安定性を追求することにある。とくに、研究代表者がそれまでの研究で得た超可積分ハミルトン系、すなわち、自由度よりも多い個数の第一積分をもつ系に対するバーコフ標準化の結果を発展させるとともに、その摂動問題に対する準周期解の存在(KAM理論)とその近傍での解の安定性・不安定性の理解を追求する。これらは共鳴

現象あるいは小分母の問題とよばれる古典的問題に深く関わるものであり、とくに以下の問題に取り組む。

- (1) 超可積分ハミルトン系の一般の特異点の近傍での標準形を求め、そこでの解構造を明らかにする。それにより、リウビル-アーノルドの定理を包含する一般的主張を得ることをめざす。
- (2) ハミルトン系以外の一般のベクトル場の超可積分性については全く研究がなされていないので、この概念を適切に定義し、その平衡点における標準化変換の収束性を議論する。
- (3) 超可積分ハミルトン系の摂動に対する準周期軌道の存在問題、すなわちKAM理論をバーコフ標準形の摂動の枠組で展開する。さらに、超可積分系の不変トーラスの摂動に対する安定性・不安定性を理論的にも数値的にも調べ、超可積分系という退化した可積分系の摂動問題の新たな進展をめざす。

以上の課題を中心に、さらに関連する諸問題についての研究を行うことを通じて、可積分系およびその摂動問題の研究に新たな知見を得ることをめざす。

3. 研究の方法

本研究を進めるための方法としては、地道な個人研究が基礎になるが、それを推進していくためには、研究代表者と分担者ならびに連携研究者の間の緊密な研究連絡、および国内外の研究者との情報交換が不可欠である。また、ヨーロッパにはハミルトン力学系の研究者が多く、それらの研究者を訪問し討論を行うことや、国際研究集会に参加し自らの成果を発表し批評を受けること、ならびにその機会を利用した研究情報の交換を行うことは、本研究を進めて行く上できわめて重要なものである。

以上の観点から、とりわけ2011年には2回の海外渡航を行い、L. Chierchia教授(ローマ第3大学)、L. Stolovitch教授(ニース大学)を訪問し、セミナー発表のほか討論を行った。また、エディンバラ大学の国際数理学センターで開催された国際会議に出席し、成果発表を行った。さらに、2013年にはL. Chierchia教授を招聘し、KAM理論ならびに本研究の手法の天体力学への応用を中心に、共鳴現象に関するさまざまな観点からの議論を行った。

4. 研究成果

(1) 超可積分ハミルトン系の特異点における標準形を得るためには、系に対して自然と定義される“ポアンカレ写像”のバーコフ標準化が出発点になる。研究代表者はこれについて以前から研究を進めていたが、本研究では与えられたシンプレクティック写像をハミルトンベクトル場の流れに埋め込むことなく、 $2n$ 次元ユークリッド空間の原点を共鳴度 q の不動点にもつ解析的シンプレクティック写像 f に対して、 f が $n+q$ 個の関数的に独立な第一積分をもつならば、収束バーコフ標準化が行えることを直接的に示した。ただし、そのためには f の線形部分の半単純性を仮定する必要があり、これはベクトル場の際の結果からみると、改良の余地があるものと思われる、それが今後の課題として残った。

(2) 自由度 n の実解析的な超可積分ハミルトン系が k ($k < n$) 次元の不変トーラスをもつとき、その共鳴度を定義し、それと第一積分の個数の間に釣り合いの条件が成り立つ場合に、ハミルトニアンに対する標準形を求めた。これにより、作用-角変数とバーコフ標準化に付随したバーコフ変数を合わせたシンプレクティック座標によって解の求積が可能になることが示された。この結果は、可積分ハミルトン系の正則なコンパクトレベル集合の近傍での解構造に関するリウビル-アーノルドの定理を特異点近傍に拡張した結果になっている。

類似の結果として、滑らかな関数の範疇での Eliasson の研究を一般化した Miranda と Zung による結果があるが、それはある種の非退化性を満たす特異点（不変トーラス）の近傍で成り立つものである。これに対して、本結果は解析的な範疇ではあるが、より一般的な特異点近傍での結果を与えるものになっている。この成果の証明には、(1)のシンプレクティック写像の標準形の結果を用いるだけでなく、可換な写像の同時バーコフ標準化も行う必要があり、その意味で写像の標準化についても新たな知見が得られた。

なお、われわれの手法はポアンカレ写像のバーコフ標準化に基礎をおくため、結果を見やすい形で述べるには、一般には相異なる特性乗数をもつ、という仮定が必要になる。これに対して、オイラー剛体の運動ではこの仮定が成り立たないにもかかわらず、周期軌道（1次元トーラス）の族の近傍で、上述した作用-角変数とバーコフ座標を組み合わせた

シンプレクティック座標が導入できることが示された。

(3) 超可積分系はハミルトン系の範疇では、ケプラー問題やオイラー剛体の運動、Calogero-Moser 系など、多くの例が知られている。これを一般の解析的ベクトル場に対して拡張し、標準形の問題を研究することで次の結果を得た。すなわち、 $2n$ 次元ユークリッド空間において原点を平衡点にもつベクトル場がそこで±ペアの固有値をもち、さらに平衡点の共鳴度が q のとき、 $n+q$ 個の第一積分とあす種の非退化性を満たす $n+q$ 個の可換なベクトル場が存在するならば、収束する標準化変換が存在することを示した。これは Zung による結果の超可積分系への拡張と考えることができるが、非退化性をめぐってはさらなる改良も可能と思われる。また、平衡点での固有値が±のペアで現れるという制限は、ハミルトン系のほか、反転可能系 (reversible system) でも成り立つが、この制限を取り除くことも今後の課題である。

(4) 研究分担者および連携研究者は天体力学に現れる系に対して、対称性をもつ周期軌道の分岐問題を衝突問題と関連させて調べ、新たな周期軌道の族の存在を示した。また、(3)で述べた反転可能系は応用上しばしば現れるが、研究分担者はこれに対して対称な周期軌道の分岐問題を研究し、対称な周期軌道の族から新たに分数調波 (subharmonic) 周期軌道が分岐するための十分条件を求めた。この結果は Henon-Heiles 系を特殊な場合として含む反転可能系に対して適用できるものになっている。

(5) 研究分担者は非対称コマの力学系に対して Melnikov 型の摂動論的方法を展開し、横断的なホモクリニック軌道を伴う周期軌道の存在を示した。これにより非対称コマの力学系に馬蹄力学が埋め込まれていることの正確な証明が与えられた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① G. H. M. van der Heijden and K. Yagasaki, Horseshoes for the nearly symmetric heavy top, Journal of Applied

- Mathematics and Physics (ZAMP), 査読有, Vol. 65 (2014), 221-240.
DOI: 10.1007/s00033-013-0319-z
- ② K. Yagasaki: Bifurcations from one-parameter families of symmetric periodic orbits in reversible systems, Nonlinearity, 査読有, Vol. 26, (2013), 1345-1360.
DOI:10.1088/0951-7715/26/5/1345 (Erratum:同誌, Vol. 26, (2013), 1823.
DOI: 10.1088/0951-7715/26/6/1823)
- ③ K. Yagasaki, Application of the subharmonic Melnikov method to piecewise-smooth systems, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 査読有, Vol. 33 (2013), 2189-2209.
DOI: 10.3934/dcds.2013.33.2189
- ④ D. Blazquez-Sanz and K. Yagasaki, Analytic and algebraic conditions for bifurcations of homoclinic orbits I: Saddle equilibria, Journal of Differential Equations, 査読有, Vol. 253, (2012), 2916-2950.
DOI: 10.1016/j.jde.2012.08.008
- ⑤ M. Shibayama and K. Yagasaki: Families of symmetric relative periodic orbits originating from the circular Euler solution in the isosceles three-body problem, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 査読有, Vol. 110, (2011), 53-70.
DOI: 10.1007/s10569-011-9338-2
- ⑥ M. Shibayama: Minimizing periodic orbits with regularizable collisions in the n-body problem, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 査読有, Vol.199, (2011), 821-841.
DOI: 10.1007/s00205-010-0334-6

[学会発表] (計 10 件)

- ① 伊藤 秀一: Superintegrability of vector fields and their normal forms near equilibrium points, 日本数学会 2013 年度年会, 函数方程式論分科会, 2013 年 3 月 20 日, 京都大学
- ② 矢ヶ崎 一幸: 非対称コマにおける馬蹄力学の存在, 日本数学会 2013 年度年会, 応用数学分科会, 2013 年 3 月 22 日, 京都大学.
- ③ M. Shibayama: Non-integrability criterion for homogeneous Hamiltonian systems via blowing-up theory of singularities, "New Perspectives on the N-body Problem", 2013 年 1 月 18 日, Banff International Research Station, Banff, Canada
- ④ 柴山 允瑠: 斉次ハミルトン系の特異点のブローアップと可積分性の判定, RIMS 研究集会「力学系の作る集団ダイナミクス-保存系・散逸系の枠組みを越えて-」,

2012 年 9 月 26 日, 京都大学.

- ⑤ 伊藤 秀一: 超可積分ハミルトン系の特異点と作用-角変数, 2012 年度日本数学会年会, 幾何学分科会, 2012 年 3 月 28 日, 東京理科大学
- ⑥ K. Yagasaki: Analytic and algebraic conditions for bifurcation of homoclinic orbits in reversible systems, RIMS 研究集会「力学系とトポロジーのフロンティア」, 2011 年 11 月 21-25 日, 京都大学.
- ⑦ 矢ヶ崎 一幸: ホモクリニック軌道の分岐に対する解析的および代数的条件, 広島微分方程式研究会, 2011 年 10 月 8 日, 広島大学.
- ⑧ H. Ito: Birkhoff normalization of symplectic maps and generalized action-angle coordinates for super-integrable systems, Workshop on "Dynamical Systems and Classical Mechanics", 2011 年 10 月 5 日, International Center for Mathematical Sciences, Edinburgh, UK
- ⑨ 伊藤 秀一: Normal forms of non-commutatively integrable vector fields near singular points, 第 4 回「ハミルトン力学系とその周辺」小研究会, 2010 年 10 月 15 日, 新潟大学サテライトキャンパス・トキメイト
- ⑩ 伊藤 秀一: Non-commutatively integrable vector fields and their normal forms at singular points, "Recent Developments in Resurgence Theory and Related Topics," 2010 年 6 月 28 日, 関西セミナーハウス

[図書] (計 0 件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

伊藤 秀一 (ITO, Hidekazu)
金沢大学・数物科学系・教授
研究者番号: 90159905

(2) 研究分担者

矢ヶ崎 一幸 (YAGASAKI, Kazuyuki)
広島大学・理学研究科・教授
研究者番号: 40200472

(3) 連携研究者

柴山 允瑠 (SHIBAYAMA, Mitsuru)
大阪大学・基礎工学研究科・講師
研究者番号: 40467444