

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月27日現在

機関番号：13801

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540183

研究課題名（和文） 解の初期値に関する連続的依存性に着目した微分方程式系の可解性

研究課題名（英文） Solvability of differential equations from the point of view of the continuous dependence of solutions on their initial data

研究代表者

田中 直樹（TANAKA NAOKI）

静岡大学・理学部・教授

研究者番号：00207119

研究成果の概要（和文）：本研究の成果は、半線形、準線形と呼ばれる発展方程式に焦点を当て、それぞれに付随するリップシツ作用素半群の概念を導入し、その近似定理を確立したことである。特色は、解の初期値に関する連続的依存性に着目して、距離に似た汎関数により安定性条件を定式化し、その安定性条件に誤差項を許容した点である。ボルテラ方程式に対する比較定理の援用による半線形発展方程式の可解性についても取り組んだ。

研究成果の概要（英文）：We introduce two notions of semigroups of Lipschitz operators associated with semilinear and quasilinear equations respectively and establish approximation theorems for such semigroups. The feature is to propose a new type of stability condition which admits “error term”. We also discuss the solvability of semilinear equations with the help of comparison theorems for Volterra equations.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2012年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：実解析学（作用素半群の理論と発展方程式）

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：リップシツ作用素半群、半線形発展方程式、準線形発展方程式、距離に似た汎関数、正則半群、安定性条件、近似定理

1. 研究開始当初の背景

(1) 加藤理論の時間大域的理論への拡張と近似理論の確立：与えられた微分方程式系において、その解が時間大域的に存在するかどうかを調べることは重要な研究テーマの1つである。多くの場合、時間大域的可解性は、方程式のもつ特性を生かしながら個別的に研究されている。これらの個別的な考察から系統的な性質を見つけ出し、組織的に時間大

域的適切性理論を展開できないかという問題は興味深い。一方、準線形微分方程式系に対する時間局所的可解性は、加藤理論として知られる、作用素半群の理論を基礎とした抽象的準線形発展方程式の理論により、組織的に取り扱うことが可能である。

(2) 単調作用素、劣微分作用素により支配される発展方程式の枠組みの拡張：劣微分作用

素に支配される発展方程式の解作用素は、ノルムに関して縮小的である。このように、2つの解の差を測るものとしてノルムが用いられることが多く、その方法に対する理論が単調作用素、劣微分作用素の理論である。高村、Brezis による単調作用素、劣微分作用素により支配される発展方程式に関する理論は、多くの非線形偏微分方程式の混合問題の強解(殆ど至る所微分可能な解)を求める問題へ応用されてきている。また、平滑化効果を証明する手段でもある。一方で、劣微分作用素の理論を直接的に適用するには困難が伴う方程式も少なくない。このような方程式に対する適切性の問題、さらに、平滑化効果の導出は、工夫を凝らされた劣微分作用素、または、数種類の劣微分作用素から構成される作用素により支配される発展方程式の可解性の問題へ変換され考察されている。このような研究手法は、Ginzburg-Landau 方程式に対する適切性(実函数論特別講演(2008秋)横田)、Neumann 境界条件つき多孔質媒体方程式に対する適切性(合同シンポジウム(2009)赤木)、熱水力学の問題に関する適切性(実函数論特別講演(2009秋)久保)の問題などの接近法に見受けられる。これらの問題を解明するために用いられた作用素が共通にもつ、ある種の連続性条件を導き出せる。この連続性条件を、劣微分作用素をその1例とする理論上きわめて重要な極大単調作用素がもつ。これは、本研究の試みが極大単調作用素の理論を一般化するものであり、汎用性の高い理論の構築性を暗示するという意味で、注目に値すると考えられる。このような理論的な立場からだけでなく、上述の数種の方程式に対する混合問題の適切性を組織的に取り扱うことができるという点で、実用的な立場からも、当該分野だけでなく非線形偏微分方程式の分野においても、一定の評価を得られると期待される。

(3) 保存則系の初期値問題に対する Kruzhkov タイプの時間大域的適切性への接近法:長年未解決であった、保存則系の小さな初期値に対する時間大域的適切性の問題は、波面追跡法、及び、粘性消滅法により解決された。しかし、得られた一意性定理は、単独方程式の場合に比べて複雑な表現をもつ。また、単独保存則に対する適切性を証明する方法には、上述の2つの方法のほかに、差分近似法がある。さらに、Nishida システムは、小さな初期値に限らず大きな初期値に対しても時間大域的な弱解(微分可能性を期待できない解)をもつことが知られているが、弱解の大きな初期値に関する連続的依存性が成り立つかどうかは分かっていない。この意味において、保存則系の大きな初期値に対する時間大域的適切性の問題は依然として

未解決である。

2. 研究の目的

(1) 加藤理論の時間大域的理論への拡張と近似理論の確立:準線形双曲型方程式に対する加藤理論は、Featured Review として紹介され、時間局所的な古典解(連続的微分可能な解)を求める強力的な理論として位置づけられている。与えられた微分方程式系において、その解が時間大域的に存在するかどうかという問題を解明するために、加藤理論を時間大域的適切性の問題へ応用できるように拡張すること、さらに、拡張された理論に対する積公式を導き出し、それを近似可解性へ応用することが本研究の目的である。

(2) 単調作用素、劣微分作用素により支配される発展方程式の枠組みの拡張:Ginzburg-Landau 方程式に対する適切性、Neumann 境界条件つき多孔質媒体方程式に対する適切性、熱水力学の問題に関する適切性の問題などを組織的に取り扱うことができるように、さらに、平滑化効果を導出できるように、単調作用素、劣微分作用素により支配される発展方程式の枠組みを拡張することが本研究の目的である。

(3) 保存則系の初期値問題に対する Kruzhkov タイプの時間大域的適切性への接近法:保存則系に対する適切性に関して、複雑な表現をもつ一意性定理の改良、差分近似解法による接近、大きな初期値に対する時間大域的適切性定理の確立、が重要で魅力ある研究として活発化すると考えられる。これらを実行に移すことが本研究の目的である。

3. 研究の方法

(1) 加藤理論の時間大域的理論への拡張と近似理論の確立:高名な加藤理論で得られる解は初期値に関してリプシッツ連続的に依存する。そこで、準線形双曲型方程式に対する時間大域的適切性の問題を、リプシッツ作用素半群のサブクラスとして、準線形双曲型発展方程式に付随するリプシッツ作用素半群なる概念を導入し、その生成の問題へ翻訳して考察した。これは、今までにない新しい研究手法であり、本研究の特色である。準線形発展方程式に付随するリプシッツ作用素半群なる概念を、「解を記述する関数」と「方程式を支配する作用素族を生成素に持つ発展作用素」を用いて定式化する戦略をとった。このような概念の定式化をすることではじめて、準線形発展方程式に付随するリプシッツ作用素半群を特徴づける条件として、ノルムの族とそれにより安定な作用素の族の存在が浮上することになった。

(2) 単調作用素, 劣微分作用素により支配される発展方程式の枠組みの拡張: 単調作用素, 劣微分作用素により支配される発展方程式の枠組みとは対照的に, 距離に似た汎関数を利用する理論がリップシッツ作用素半群の理論であるといえる。本研究手法は, 微分作用素のイメージとは結びつきにくい連続性条件に着目し, リップシッツ作用素半群の生成定理を展開しようという点で, 先行の研究とは全く異なる方向性をもつことになる。

(3) 保存則系に対する Kruzhkov タイプの時間大域的適切性への接近法: 保存則系の近似可解性を目指して, リップシッツ作用素半群の近似定理を考察する。初期値に関する連続的依存性に着目して導入される安定性条件を満たす近似作用素が, 縮小的になるような距離に似た汎関数が存在する。応用上, そのような汎関数が, 片側凸性を有する場合は少なくない。特に, 保存則系に関して, 古典解と弱解を測る汎関数は片側凸を有する場合がある。そこで, 汎関数が片側凸を有する場合に焦点を絞り議論する。

4. 研究成果

(1) 半線形発展方程式に対する時間大域的適切性: 準線形発展方程式に関する加藤理論の時間大域的理論への拡張を目指して, 半線形と呼ばれる発展方程式に焦点を当て, その時間大域的な古典解を求めるための枠組みを提案した。その枠組みの特色は, 主部である線形作用素の定義域が考えている空間で稠密とは限らない点, 及び, 解の低階のエネルギー評価に対応する『近似解に対する増大条件』を課すだけで, 解の高階のエネルギー評価を導出でき, そのため, 時間大域的な古典解が得られる設定になっている点である。これらの特徴を備えた偏微分方程式として, 強い粘性を伴う準線形双曲型偏微分方程式, 及び, Zakharov 方程式などが挙げられる。これらの方程式の時間大域的可解性の問題へ得られた定理を応用した。

(2) 放物型半線形発展方程式に付随するリップシッツ作用素半群の近似理論の確立: 放物型半線形発展方程式は, その方程式を支配する作用素が正則半群の生成素の非線形摂動として表現されるものであり, 興味深い偏微分方程式を組織的に扱うものである。これに焦点を当て, 積公式を開発した。その際, 誤差項を許容し距離に似た汎関数を用いた安定性条件を提案したことが従来になく本研究の特色である。それと整合性条件のもとで得られた放物型半線形発展方程式に付随するリップシッツ作用素半群の積公式を, fractional step method による Ginzburg - Landau 方程式に対する適切性定理の証明へ

応用した。

(3) 加藤理論の時間大域的理論への拡張: 準線形双曲型方程式が一意的な時間大域解をもつと仮定するとき, 解を記述する関数と準線形作用素から生じる作用素族を生成素にもつ発展作用素の存在を示し, 解の一意的により, 両者を結びつける等式を導出した。これを用いて, 準線形双曲型方程式に付随するリップシッツ作用素半群の概念を導入したことが本研究手法の特色である。このクラスのリップシッツ作用素半群に対する積公式を, 準線形作用素に課す整合性条件から生じる誤差項を許容する近似解をうまく構成し, その近似解と離散半群の差を詳細に評価することで証明した。その結果, 加藤理論の時間大域的理論への拡張に成功した。

(4) 半線形確率微分方程式に対する viability の考察: 微分方程式に対する viability の考察の歴史は, 有限次元空間における常微分方程式に対する南雲の定理までさかのぼり, 近年では, 抽象空間における微分方程式に対する viability が考察されてきている。本研究では, 確率微分方程式に対する viability を証明するために, その問題を確率微分方程式に付随する発展作用素の概念を導入し, その生成の問題に翻訳し考察した。この手法が特色である。確率微分方程式に付随する発展作用素を生成するための必要十分条件が, 確率劣接線条件と uniqueness function を用いて表現される消散条件であること証明し, Aubin と Da Prato による有限次元の結果をヒルベルト空間の場合へと拡張することに成功した。

(5) リップシッツ作用素半群の近似理論の確立: 先行研究と異なる点は, 近似作用素が多価であることを許容したこと, および, 滑らかさをもつ初期値に対する近似解を利用して, 距離に似た汎関数による近似作用素の縮小性の概念を一般化した安定性条件を設定したことである。この工夫により, 2次元のナビエ・ストークス方程式に対する Projection Method へ応用可能なリップシッツ作用素半群の近似定理が得られた。

(6) ボルテラ方程式に対する比較定理の援用による半線形発展方程式の可解性: 半線形発展方程式の軟解はボルテラ型の積分方程式の解として定式化される。そのため, 軟解の初期値に関する連続的依存性は, 2つのボルテラ型の積分方程式の差を評価することで得られ, 評価後の方程式は特異な核をもつスカラー値ボルテラ方程式となりえる。このような着想のもとで, 特異な核をもつスカラー値ボルテラ方程式の極大解を利用して, 軟

解の初期値に関する連続的依存性を定式化した点が本研究の特色である。特異な核をもつスカラー値ボルテラ方程式の極大解に対する比較定理を準備して、半線形発展方程式の可解性を考察し、無流速境界条件付き移流拡散方程式系へ応用した。

(7) 単調作用素, 劣微分作用素により支配される発展方程式の枠組みの拡張: 極大単調作用素の理論を一般化した枠組みを提案できつつあり, 整理している段階である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

- ① Toshitaka Matsumoto, Naoki Tanaka, Nonlinear perturbations of a class of holomorphic semigroups of growth order α by comparison theorems for Volterra equations, *Nonlinear Anal.*, 査読有, 84 (2013) 146-175.
DOI:10.1016/j.na.2013.02.016
- ② Yoshikazu Kobayashi, Naoki Tanaka, Approximation of semigroups of Lipschitz operators, *J. Math. Anal. Appl.*, 査読有, 397 (2013) 529-536.
DOI:10.1016/j.jmaa.2012.07.069
- ③ Naoki Tanaka, A product formula for semigroups of Lipschitz operators associated with abstract quasilinear evolution equations, *Math. Nachr.*, 査読有, 285 (2012) 507-527.
DOI:10.1002/mana.201010084
- ④ Naoki Tanaka, A viability theorem of stochastic semilinear evolution equations, *Israel J. Math.*, 査読有, 186 (2011) 1-43.
DOI:10.1007/s11856-011-0130-5
- ⑤ Toshitaka Matsumoto, Naoki Tanaka, A product formula for semigroups of Lipschitz operators associated with semilinear evolution equations of parabolic type, *J. Approx. Theory*, 査読有, 163 (2011) 1217-1237.
DOI:10.1016/j.jat.2011.04.002
- ⑥ Hirokazu Oka, Naoki Tanaka, Global solvability for abstract semilinear evolution equations, *Math. Nachr.*, 査読有, 283 (2010) 1171-1193.
DOI: 10.1002/mana.200710071

[学会発表] (計7件)

- ① 富澤 佑季乃, Banach 空間上の Lipschitz 発展作用素, 日本数学会年会, 2013年3月20日, 京都大学 (京都府)

- ② Yukino Tomizawa, Nonautonomous Differential Equations and Lipschitz Evolution Operators in Banach Spaces, International Conference on the Theory, Methods and Applications of Nonlinear Equations, 2012年12月20日, Texas A&M University-Kingsville (Texas, USA)
- ③ 富澤 佑季乃, Unique solutions to nonautonomous differential equations in Banach spaces, 日本数学会秋季総合分科会, 2012年9月21日, 九州大学 (福岡県)
- ④ Yoshikazu Kobayashi, Nonautonomous differential equations in Banach spaces with an application, The Fourth International Symposium on BANACH and FUNCTION SPACES 2012, 2012年9月12日 - 15日, Kyushu Institute of Technology (Fukuoka)
- ⑤ 松本敏隆, 増大度 α の解析的半群の非線形摂動, 日本数学会年会, 2012年3月28日, 東京理科大学 (東京都)
- ⑥ 田中直樹, リプシッツ作用素半群の近似定理, 日本数学会年会, 2011年3月21日, 早稲田大学 (東京都)
- ⑦ 松本敏隆, 半線形放物型方程式に付随するリプシッツ作用素半群に対する積公式, 日本数学会秋季総合分科会, 2010年9月25日, 名古屋大学 (愛知県)

[その他]

ホームページ等

<http://tdb.adb.shizuoka.ac.jp/rd/search/japanese/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田中 直樹 (TANAKA NAOKI)
静岡大学・理学部・教授
研究者番号: 00207119

(2) 研究分担者

清水 扇丈 (SHIMIZU SENJO)
静岡大学・創造科学技術大学院・教授
研究者番号: 50273165

(3) 連携研究者

田村 英男 (TAMURA HIDEO)
岡山大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号: 30022734
浅倉 史興 (ASAKURA FUMIOKI)
大阪電気通信大学・金融経済学部・教授
研究者番号: 20140238