

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 29 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010 ～ 2012

課題番号：22540187

研究課題名（和文） ボルツマン方程式と非線形超局所解析

研究課題名（英文） The Boltzmann equation and nonlinear microlocal analysis

研究代表者

森本 芳則 (MORIMOTO YOSHINORI)

京都大学・大学院人間・環境学研究科・教授

研究者番号：30115646

研究成果の概要(和文):切断近似をしないボルツマン方程式の初期値問題を考察し,解の存在,解の平滑効果,平衡解への収束,解の一意性と非負値性などの解の構造を,物理的に妥当な衝突断面積の仮定の下で明らかにした.線形偏微分方程式の研究で展開された超局所解析理論を用いて,衝突する粒子間の衝突角度に関する特異性を内在するボルツマン衝突積分作用素に対して,精緻な上からと下からの評価を与えることが本研究の重要な鍵であった.

研究成果の概要(英文):We considered the Cauchy problem for the Boltzmann equation without angular cutoff approximation. To this Cauchy problem, we showed the structure of solutions, such as, the existence of solutions, the smoothing effect of solutions, the convergence of the equilibrium state, the uniqueness and the non-negativity of solutions, under the physically reasonable assumptions of the collision cross sections. The key ingredient of this study was to give precise lower and upper estimates for the Boltzmann collision integral operator which contains the singularity with respect to the angular variable between collision particles, by means of the microlocal analysis developed in the theory of linear partial differential equations.

交付決定額

(金額単位:円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2012年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：ボルツマン方程式, 衝突積分項, 非切断近似, 平滑効果, 大域解, 安定性, 解の一意性, 測度解

1. 研究開始当初の背景

(1) ボルツマン方程式は, 微分積分方程式であり, 物理的に重要なモデルではその積分項の積分核が, 粒子の衝突角度を変数として特異性を持ち, 数学的な厳密な理論を展開する

には近年まで多くの困難があった. これまでの多くの研究は特異性をもつ部分を取り除いた条件 (Grad's の切断近似) の下で議論されてきたが, 2000年に発表された Alexandre, Desvillettes, Villani, Wennberg

の論文により、衝突積分項の下からの劣楕円型評価が数学的に rigorous な形で明らかになり、ソボレフ空間の枠内で切断近似をしないボルツマン方程式の解析が可能となった。(2) 代表者は、鶴飼正二氏(東工大名誉教授), R.Alexandre, C.-J.Xu (在仏), T.Yang (在香港)との国際共同研究により切断近似をしないボルツマン方程式に対する解析を 2006 年より着手し、空間一様な場合の初期値問題の弱解の平滑効果、空間非一様な場合の古典解の(時間)局所存在及び古典解の正則化について、衝突積分項の積分核の運動因子に関する特異性を取り去った場合において明らかにした。

(3) 切断近似をした、空間非一様なボルツマン方程式の初期値問題の(時間)大域解については、マクスウェル関数の周りでの摂動解の存在がスペクトル解析を用いて鶴飼氏(1974)により示されており、同様な摂動解がマクロ・ミクロ分解を用いて 2 乗可積分関数の空間で、Y. Guo(2004), T.-P.Liu-S.H. Yu-T.Yang(2004)によって独立に構成されていた。以上は古典大域解であるが、大域的な弱解については DiPerna-Lions (1989)による繰り込み解の存在が示されており、その結果は Alexandre-Villani(2002)により、切断近似をしない場合に拡張されたものの、その解は“defect measure”を含んでおり通常の弱解と呼ばれるものより更に弱い解である。(2)で述べた正則化現象を示すことが可能な時間大域的な古典解の存在は非切断型の場合、未解決であった。

2. 研究の目的

(1) 空間非一様な切断近似をしないボルツマン方程式の初期値問題の(時間)大域解をボルツマン方程式の大域的安定解であるマクスウェル関数の周りでの摂動解として構成し、得られた解のマクスウェル関数への平衡安定性(漸近時間減衰)を示す。また、解の平滑効果、解の一意性、解の正值性を得られた時間大域解を含むできるだけ広い関数空間で明らかにする。対象とするボルツマン方程式の衝突項は、積分核の運動因子が粒子の相対速度について本来の特異性をもったものを扱う。

(2) 空間一様な切断近似をしないボルツマン方程式の初期値問題の平滑効果を、質量保存則、エネルギー保存則、エントロピー有界性を満たす Villani (1998) が構成した弱解(1 乗可積分関数)に対して示す。解の平滑効果は切断近似をしないボルツマン方程式特有の性質であり、本来の物理モデルである衝突積分項の積分核が粒子間相対速度について特異性をもつ場合に示すことは重要である。衝突積分核が粒子間相対速度によらない、マクスウェル型と呼ばれる場合は、測度

(measure) 解が前世紀に既に得られており、その平滑効果を示す。

(3) 衝突する粒子間の反発ポテンシャルを粒子間距離の逆べきに仮定することにより衝突積分核の衝突角度による特異性は生じるが、反発ポテンシャルがクーロン力の場合はボルツマン方程式の枠をこえ、非線形 2 階偏微分積分方程式であるランダウ方程式が考察される。上記(1),(2)の研究目的の遂行には擬微分作用素、フーリエ積分作用素などの超局所解析理論が有効であるが、ランダウ方程式、ボルツマン方程式などの運動学方程式を非線形超局所解析理論で統一的に捉えて理解することも本研究の目的である。

3. 研究の方法

(1) 代表者は分担者である浅倉史興氏から非線形双曲型保存則系に関する豊富な研究経験に基づくボルツマン方程式の解の保存則とボルツマン方程式、ランダウ方程式の導出に関する的確な知識の提供を受けた。分担者上木直昌氏からは、空間一様な積分核が粒子間相対速度によらないマクスウェル型の非切断型ボルツマン方程式に関する確率解析による先駆的先行研究(田中洋 1978)の解説とそこで用いられた Wasserstein 距離などの確率解析の最近の研究動向の情報を得た。

(2) 代表者と研究協力者 C.-J. Xu, T. Yang, R. Alexandre, 鶴飼正二氏は各年度、数回に渡り、京都大学、香港城市大学、Rouen 大学、(Xu 氏が併任教授を務める)武漢大学で大型黒板、ホワイトボード、プロジェクターを用いた共同研究の機会をもった。討論結果を記録した画像ファイルをもとに e-メールにより共同研究を深化させた。代表者は、横浜在住であった鶴飼氏(平成 24 年 11 月逝去)と、京都大学東京オフィス(品川)、学士会館東京連絡事務所(神保町)を利用して研究討論を定期的に行った。代表者は、研究協力者 N. Lerner, K. Pravda-Starov, C.-J. Xu と平成 23 年度、武漢大学で 2 週間、各年度とも Rouen 大学、京都大学、パリ 6 大学で共同研究の機会をもった。

4. 研究成果

(1) 空間非一様な非切断型ボルツマン方程式の初期値問題について、その時間大域解(古典解)の存在を積分核が粒子間相対速度について特異性を含む場合を含めて、明らかにした(発表論文⑤, ⑧, ⑩)。この結果は、ボルツマン方程式の安定解であるマクスウェル関数の周りでは、ボルツマン衝突積分作用素を線形化した作用素に関して、その上からと下からの最良ソボレフ評価を得ることにより初めて可能となった。最良評価は線形化作用素と同値なノルムを定義することであり、このノルムにより、摂動解に対する非線

形項も無駄なく評価できた。非切断型の場合の時間大域解の存在は長らく未解決な問題であったが、我々の研究成果とほぼ同時期に、上記ノルムと同等ではあるが違う定義を用いた結果 (Gressman-Strain 2011) が報告された。

(2) 上記で構成した大域解のマクスウェル関数への平衡安定性 (漸近時間減衰) を示す共に、解の平滑化と解の一意性、解の正值性 (初期値が非負であれば解は非負であること) を構成した大域解を含む広範囲な関数空間上で明らかにした (発表論文⑦)。大域解はマクスウェル関数の摂動として構成されるので初期摂動が小さければ負の解も存在し、解の非負性は別途、厳密な証明が必要であった。物理的には解は気体粒子の分布であり非負であることが当然要請されるが、切断近似の場合も含めて摂動解の非負性の数学的に厳密な証明はこれまでなかった。

(3) 空間非一様な非切断型ボルツマン方程式の初期値問題について、衝突角に関する特異性が弱い場合に時間局所解を構成した (発表論文⑨)。衝突積分核に制限は付けるが、空間変数に関する一様局所ソボレフ空間を解空間として導入することにより、初期値の関数空間は空間変数について広範なものである。ただし、速度変数についてはマクスウェル関数の分数べき程度の減衰が仮定されている。

(4) 空間非一様な非切断型ボルツマン方程式の初期値問題について、衝突積分核が粒子間相対速度の負べきであるソフトポテンシャルと呼ばれる場合に、速度変数についてはマクスウェル関数の分数べき程度の減衰の仮定の代わりに、多項式程度の減衰のみの仮定で解の一意性を示した (発表論文⑥)。非切断型ボルツマン衝突積分作用素の評価において代表者等が初めて導入した、衝突前後の速度変数間の特異変数変換を用いることにより証明が可能となった。解の存在についても、多項式オーダーの減衰で示すことは興味ある問題である。

(5) 空間一様なボルツマン方程式に対する初期値問題の 1 乗可積分関数弱解 (Villani 解) の平滑効果についてほぼ最終的な結果を与えた (発表論文③)。従来の結果は、衝突積分核の粒子間相対速度の特異性を取り去った条件の下であり、解の一意性が成立しないハードポテンシャルな場合に、平滑効果をもつ解の存在のみが議論されてきた。本論文で時間従属する軟化子を導入し、衝突積分作用素の精緻な評価を駆使することにより、すべての弱解が平滑効果をもつことが明らかになった。

(6) 空間一様なボルツマン方程式で積分核が粒子間相対速度によらないマクスウェル型に対する初期値問題は解の存在と一意性

がエネルギー有界の条件の下で既知であった。結果は測度解まで成立する (田中 1978、Toscani-Villani 1999)。

Cannone-Karch (2010) は Bobylev のエネルギー無限な自己相似解の研究に触発されてエネルギー無限な測度解の存在と一意性を考察したが衝突積分核の特異性は弱い場合しか扱われていなかった。衝突積分作用素がもつ対称性について着目して測度解まで拡張して用いることにより Cannone-Karch の結果を強い特異性を持つ場合まで拡張することに成功した (発表論文②)。更に測度解の平滑効果について考察し、初期値が 1 点のみの Dirac 測度以外であれば必ず平滑効果が起こることを T. Yang 氏との共同研究で示すことができた (学会発表①, ②)。

(7) ボルツマン方程式の衝突積分核が粒子間相対速度によらないマクスウェル型の場合、マクスウェル関数の周りでボルツマン衝突積分作用素を線形化した作用素はエルミート関数、球面調和関数により固有関数展開されることが古典的に知られていたが、最新の超局所解析理論を適用することにより、運動学方程式における線形化ランダウ衝突積分作用素と線形化ボルツマン衝突積分作用素の関係を統一的に議論することに成功した (発表論文①)。この研究方向はランダウ方程式、ボルツマン方程式の解の Gevrey 級あるいは、解析的平滑効果に応用できる可能性を含んでいる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

- ① N. Lerner, Y. Morimoto, K. Pravda-Starov and C.-J. Xu, Phase space analysis and functional calculus for the linearized Landau and Boltzmann operators, *Kinet. Relat. Models*, 査読有, Vol. 6, (2013) 625-648
DOI:10.3934/krm.2013.6.625
- ② Y. Morimoto, A remark on Cannone-Karch solutions to the homogeneous Boltzmann equation for Maxwellian molecules, *Kinet. Relat. Models*, 査読有, Vol. 5 (2012), 551-561
DOI:10.3934/krm.2012.5.551
- ③ R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu and T. Yang, Smoothing effect of weak solutions for the spatially homogeneous Boltzmann Equation without angular cutoff, *Kyoto J. Math.*, 査読有, Vol. 52 (2012), 433-463
DOI:10.1215/21562261-1625154

- ④ N. Lerner, Y. Morimoto and K. Pravda-Starov, Hypocoelliptic estimates for a linear model of the Boltzmann equation without angular cutoff, *Comm. Part. Diff. Equat.*, 査読有, Vol. 37 (2012), 234-284
DOI:10.1080/03605302.2011.625462
- ⑤ R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu and T. Yang, The Boltzmann equation without angular cutoff in the whole space: I, Global existence for soft potential, *J. Funct. Anal.*, 査読有, Vol. 262 (2012), 915-1010
DOI:10.1016/j.jfa.2011.10.007
- ⑥ R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu and T. Yang, Uniqueness of solutions for the non-cutoff Boltzmann Equation with soft potential, *Kinet. Relat. Models*, 査読有, Vol. 4-4 (2011), 919-934
DOI:10.3934/krm.2011.4.919
- ⑦ R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu and T. Yang, The Boltzmann equation without angular cutoff in the whole space: Qualitative properties of solutions, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 査読有, Vol. 202(2011), 599-661
DOI:10.1007/s00205-011-0432-0
- ⑧ R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu and T. Yang, The Boltzmann equation without angular cutoff in the whole space: II, global existence for hard potential, *Analysis and Applications*, 査読有, Vol. 9-2 (2011), 113-134
DOI: 10.1142/S0219530511001777
- ⑨ R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu and T. Yang, Bounded solutions of the Boltzmann equation in the whole space, *Kinetic and Related Models.*, 査読有, Vol. 4(2011) 17-40
DOI:10.3934/krm.2011.4.17
- ⑩ R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu and T. Yang, Global existence and full regularity of the Boltzmann equation without angular cutoff, *Comm. Math. Phys.*, 査読有, Vol. 304 (2011), 513-581
DOI: 10.1007/s00220-011-1242-9
- [学会発表] (計 11 件)
- ① Y. Morimoto, CAU-Kyoto University Joint Workshop on Nonlinear PDEs Chung-Ang University, "Smoothing effect of solutions to the homogeneous Boltzmann equation without angular cutoff" Department of Mathematics, Seoul, Korea, February 15, 2013
- ② Y. Morimoto, Conference on Kinetic Theory and Related Fields: Theoretical and Numerical Approaches, "Smoothing effect of the homogeneous Boltzmann equation with measure initial datum" 京都大学楽友会館, 9月28日, 2012
- ③ Y. Morimoto, 日本数学会年会, 解析学賞受賞(2011年度, 第10回) 特別講演: "切断近似をしないボルツマン方程式 - 衝突積分作用素の対称性" 東京理科大学, 3月27日, 2012
- ④ Y. Morimoto, 数理科学セミナー(第2回 信州松本偏微分方程式セミナーとの共同開催) 連続講演, "ボルツマン方程式とフーリエ解析" 松本市浅間温泉みやま荘, 9月25-26日, 2011
- ⑤ Y. Morimoto, 日本応用数理学会 2011 年度年会総合講演, "角切断近似をしない Boltzmann 方程式", 同志社大学明徳館, 9月15日, 2011
- ⑥ Y. Morimoto, The 36th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations "The Boltzmann equation without angular cutoff approximation - uniqueness, existence and regularity of solutions" Faculty of Science, Hokkaido University, 8月22日, 2011
- ⑦ Y. Morimoto, Analyse Numerique et Equations aux Derivees Partielles, Le seminaire a Orsay, "Recent topics on the non-cutoff Boltzmann equation - Smoothing effect of weak solutions in spatially homogeneous case" Universite de Paris-Sud, 仏, 3月17日, 2011
- ⑧ Y. Morimoto, International conference on nonlinear evolutionary partial differential equations - theories and applications, "Smoothing effect of weak solutions for spatially homogeneous Boltzmann equation" Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, 中国, 1月13日, 2011
- ⑨ Y. Morimoto, International Conference the 27th Matsuyama Camp, Recent Development on Partial Differential Equations, "Uniqueness of solutions for non-cutoff Boltzmann equation and singular change of variables in pre-post collisional velocity" ともいき荘, 龍谷大学, 京都, 1月7日, 2011
- ⑩ Y. Morimoto, Mini-Symposium, Kinetic and hyperbolic equations, "Uniqueness Theorems for solutions of Boltzmann equation without angular cutoff" Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, 中国, 11月25日, 2010

- ⑪ Y. Morimoto, Work Shop on Kinetic and Related Models, "Uniqueness of the solution for non-cutoff Boltzmann equation in the whole space" North West University, X'ian, 中国, 10月16日, 2010

6. 研究組織

(1) 研究代表者

森本芳則 (MORIMOTO YOSHINORI)
京都大学・大学院人間・環境学研究科・教授
研究者番号：30115646

(2) 研究分担者

上木 直昌 (UEKI NAOMASA)
京都大学・大学院人間・環境学研究科・准教授
研究者番号：80211069

浅倉 史興 (ASAKURA FUMIOKI)
大阪電気通信大学・金融経済学部・教授
研究者番号：20140238

(3) 連携研究者 無

(4) 研究協力者

鵜飼 正二 (UKAI SEIJI)
東京工業大学・名誉教授

ALEXANDRE RADJESVARANE
French Naval Academy・教授 仏

LERNER NICOLAS
パリ 6 大学・数学科・教授 仏

PRAVDA-STAROV KAREL
Cergy-Pointoise 大学・数学科・講師 仏

XU CHAO-JIANG
Rouen 大学・数学科・教授 仏

YANG TONG
City University of Hong Kong・数学科・教授, 香港