

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 4 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540205

研究課題名(和文) 定常点過程論の枠組みによるランダム作用素のスペクトル統計の研究

研究課題名(英文) Study of spectral statistics for random operators in the framework of stationary point process theory

研究代表者

南 就将(MINAMI, Nariyuki)

慶應義塾大学・医学部・教授

研究者番号：10183964

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円、(間接経費) 690,000円

研究成果の概要(和文)：(1) 自己共役作用素の離散スペクトルが、あるスケーリングの下に定常点過程の典型的な実現に見えることの数学的定式化として「漸近エルゴード性」という概念を導入した。さらに、ある種の1次元シュレーディンガー作用素のスペクトルについて漸近エルゴード性を証明し、離散型アンダーソン・モデルに対しては部分的な結果を得た。

(2) 半直線上の1次元シュレーディンガー作用素 H で、ホワイトノイズと、正の無限大に発散する一様電場とをポテンシャル項に持つものを考え、ホワイトノイズ項の特異性にもかかわらず、 H が自己共役作用素として実現され、確率1で純離散スペクトルを持つことを証明した。

研究成果の概要(英文)：(1) We introduced the concept of "asymptotic ergodicity" as a mathematical formulation of the similarity, under some scaling, of discrete spectrum of a self adjoint operator with a typical realization of a stationary point process. We also showed asymptotic ergodicity for the spectrum of a certain one dimensional Schrodinger operator, and obtained a partial result for discrete Anderson models.

(2) We considered a one dimensional Schrodinger operator H on the half line whose potential term consists of white noise plus a uniform electric field tending to plus infinity. Despite of the singularity of white noise term, we showed that H can be realized as a self-adjoint operator and has purely discrete spectrum, with probability one.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：スペクトル統計 ランダム作用素 点過程 自己共役性 漸近エルゴード性 確率エアリー作用素

1. 研究開始当初の背景

スペクトル統計は、原子核の励起スペクトルの統計的性質をランダム行列モデルを用いて特徴づけようという Wigner, Dyson, Mehta 等による研究に端を発している (Porter(ed.): Statistical Theories of Spectra: Fluctuations (1965))。この研究に触発されて S.A. Molchanov (Commun. Math. Phys. vol.78 (1981)429-446)は次のことを証明した: ランダムなポテンシャルを持つ1次元シュレーディンガー作用素のスペクトルを、エネルギー軸の与えられた1点を中心にスケーリングするとき、無限体積極限においてポアソン点過程に収束する。Molchanov のこの顕著な結果を多次元系に拡張する問題はその後長い間未解決だったが、本研究代表者により離散型のランダム・シュレーディンガー作用素(アンダーソン・モデル)の場合に解決された(N.Minami, Commun. Math. Phys. vol.177 (1996) 709 - 725)。また本研究代表者は、有限区間上の特殊な1次元シュレーディンガー作用素に対して、その固有値の平方根の間隔分布をスペクトル軸に沿って観測するとき、準古典極限において近似的に指数分布が現れること、したがってスペクトルが擬似的にポアソン性を示すことを証明した(N.Minami, Prog. Theor. Phys. Suppl. vol.116 (1994) 359-368)。一方 Berry と tabor (Proc. Roy. Soc. London Ser.A vol.356 (1977) 375-394) は準古典極限における量子ハミルトニアン(ハミルトン系)のスペクトルが、量子化される前の古典ハミルトン系の性質により異なるスペクトル統計を示すという仮説を提起した。本研究代表者はかねてからこの問題に関心を持つと同時に、必ずしもランダムでないハミルトニアン(ハミルトン系)のスペクトルに対する「統計」とはそもそも何を意味するのかという疑問を抱くうちに、スペクトル統計の記述は点過程(直線上のランダムな点配置)をモデルとしてなされるべきであるという着想に達し、論説(N.Minami, CRM Proceedings and Lecture Notes vol.42 (2007) 353 - 398) を発表した。この論説において本研究代表者は、作用素の離散スペクトルを定常点過程のサンプルとみなすための準備として、unfolding という一種のスケーリング操作を定式化し、またスペクトル統計の記述に次の3つの枠組みを考えた: (a) ランダム作用素のスペクトル(それ自体がすでに点過程である)がポアソン点過程などの典型的な点過程に法則収束することを示す極限定理的枠組み; (b) unfolding の後にスペクトル軸に沿った統計的操作を行い、そのデータが典型的な点過程に対するデータに確率1で収束することを示すエルゴード定理的枠組み; (c) パラメータに依存するがランダム性を持たない作用素のスペクトルに何らかの unfolding を施した後に (b) とのアナロジーを追う決定論的枠組み。上述した S.A. Molchanov (1981)および本研究代表者

の1996年の研究は(a)の枠組み、本研究代表者の1994年の研究は(b), (c)の枠組みでの研究といえる。このようにスペクトル統計の数学的研究には個別の具体例の解析とともに、問題を整理するための枠組みの整備が重要な意味を持つと考え、本研究の課題を設定した。

2. 研究の目的

一般的・基礎的な枠組みの整備(1)と、個別の量子ハミルトニアンに対するスペクトル統計の解析(2)とに分けて研究目的を設定した。

(1)一般論

「研究開始当初の背景」において述べたように、スペクトル統計はランダム作用素のスペクトルをある種の極限操作の後に定常点過程と同一視することであるが、より詳しい描像を得るために狭義の定常点過程だけでなく、パラメータに依存した点過程の族で、定常点過程に法則収束するもの、いわば「漸近的に定常な点過程」というカテゴリーを設定した上で、その一般論を構築する。特に遠く離れた固有値間の相関を問題にするときにはこのような枠組みが必要と考えられる。そのため、漸近的に定常な点過程に対して、定常点過程論におけるエルゴード性、Palm 測度などのアナロジーがどのような形で成立するかを調べる。さらに相関係数、spectral form factor などスペクトル統計に現れる種々の統計量の間になり立つ相互関係をこの一般論の中で確立する。

ランダム作用素のスペクトル統計においてしばしばポアソン点過程が得られる理由の1つは、固有関数の空間的局在(アンダーソン局在)によって系全体のスペクトルが相互作用の弱い部分系の重ね合わせで近似されるからである。しかし、このことが直ちにスペクトル統計のポアソン性を導くのではなく、一般にはいわゆる無限分解可能点過程が得られる。無限分解可能点過程については旧東ドイツの数学者による研究の蓄積があるが、文献検索により判断する限り、隣接する点の間隔分布等、スペクトル統計に関わる性質についてはあまり調べられていないので、一般論を整備していきたい。

(2)各論

本研究代表者が離散型のランダムな多次元シュレーディンガー作用素(アンダーソン・モデル)に対するスペクトル統計について得たポアソン型極限定理(N.Minami, Commun. Math. Phys. vol.177 (1996) 709-725)を「研究開始当初の背景」において述べた(b)の枠組みにおいて証明しなおす。

別のケーススタディとして、ホワイトノイズをポテンシャルとするシュレーディンガー作用素に対するスペクトル統計を詳しく調べたい。このモデルに対してはスペクトル統計の定式化が複数考えられ、それら相互の関連を調べることは一般論の整備のためにも有意義と考えられる。

3. 研究の方法

本研究課題の研究方法は基本的に理論的・数学的考察であって、実験やコンピュータによる数値計算は行わなかった。しかし、そのためには当然過去の研究成果を調べるために図書の購入や電子図書館での検索を通じて文献調査を行う必要があった。また、研究集会を開催したり、国内外の研究集会に参加して本研究課題の関連分野の現況について情報収集を行うことは有益であった。したがって、研究経費の主な用途は、関連する図書の購入、研究集会に参加するための旅費、また主催した研究集会参加者への旅費の支給、および論文作成や文献検索に用いるパーソナルコンピュータの購入であった。

4. 研究成果

(1)ある種のランダム作用素のスペクトルの漸近エルゴード性

成果の概要：パラメータに依存し、離散スペクトルを持つランダム作用素の固有値系列を、その作用素に固有のある非線形関数（典型的には固有値分布関数）に代入して、得られた数列が直線上で漸近的に一樣分布するようにすることを unfolding という。ここで「漸近的」とは作用素が含むパラメータをある極限值に近づけた場合に対応するものである。こうして得られた数列にランダムな「ずらし」を与えることにより定常な点過程が得られるとき、スペクトルは「漸近エルゴード性を持つ」という。本研究ではこの概念の定式化を行うとともに、有限区間上の、プランク定数を含む1次元シュレーディンガー作用素で、ランダムに配置されたデルタ関数をポテンシャル項に持つものについて、この漸近的エルゴード性が準古典極限において成り立つことを証明した。また離散型アンダーソン・モデルについては部分的な結果として、空間次元が1であって、ある部分列に沿って無限体積極限を考えると、確率1でスペクトルの漸近エルゴード性が成り立つことを証明した。

成果の位置づけとインパクト：本研究においては部分的な結果を得るにとどまったが、アンダーソン・モデルのスペクトルに対して漸近エルゴード性を示すのが本研究における当初の目的の一つであった。この問題はその後 Frederic Klopp 氏により完全な形で解決されたが (F. Klopp, Prob. Th. Rel. Fields, vol.155 (2013) 867-909)、そのことは本研究において定式化された「漸近エルゴード性」という概念がスペクトル統計の理論において有効なものであることの一つの証明であると考えられる。

今後の展望：漸近エルゴード性をさらに多様なランダム作用素のスペクトルに対して証明していくことは今後も興味深い成果の期待されるテーマである。また、アンダーソン・モデルのスペクトルの漸近エルゴード性の証明に必要となった "decorrelation estimate" (ランダム作用素の固有値が互い

に重ならない2つの区間に同時に含まれる確率の評価)に対するより深い理解が望まれる。

(2)確率的 Airy 作用素 (stochastic Airy operator) の定義と自己共役性

成果の概要：半直線上の1次元シュレーディンガー作用素 H で、ホワイトノイズおよび正の無限大に発散する一樣電場 (すなわち1次関数) をポテンシャル項とするものを考察し、まず H が2乗可積分関数の作るヒルベルト空間における閉対称作用素として実現されることを示し、さらにそれが確率1で下に半有界な自己共役作用素であって離散スペクトルのみ持つことを証明した。証明の方法は、ブラウン運動の見本関数 (その形式的な微分がホワイトノイズである) から作られるある2次形式の半有界性、完全連続性などを示すことによるものである。またこの方法を一般化して、ホワイトノイズを分数ブラウン運動の見本関数の微分で置き換え、一樣電場をベキのオーダーで正の無限大に発散する任意の関数で置き換えても同様の結果が得られた。

成果の位置づけとインパクト：本研究代表者は以前に発表した論文 (N. Minami, Annales de l'I.H.P., section A, vol.56 (1992) 307-344) においてすでにホワイトノイズと負の無限大に発散する一樣電場とをポテンシャル項とする半直線上のシュレーディンガー作用素を扱い、そのスペクトルの性質をほぼ完全に決定していた。特にポテンシャル項がホワイトノイズ様の特異性を持つ場合でも、形式的に与えられたシュレーディンガー作用素がヒルベルト空間における閉対称作用素として実現されることはすでに本研究代表者には知られていた。一樣電場が正の無限大に発散する場合も 1992 年当時すでに考察したのだが、2次形式を用いる方法に思い至らなかったため自己共役性の証明に成功せず、以後断念していた。

本研究を行う過程で、ベータ・アンサンブルというランダム行列の固有値系列が、上記 stochastic Airy operator の固有値系列で近似されるという研究 (J. Ramirez, B. Rider, B. Virag, J. Amer. Math. Soc. vol.24 (2011) 919-944) に出会い、改めてこの作用素に関心を持った。実は Ramirez 等は stochastic Airy operator がヒルベルト空間における作用素として自然に実現されることを認識せず、シュヴァルツ超関数を用いた人工的な定式化をしている。本研究の成果は彼らの研究を正しい文脈に置き直し、同時に代表者自身の以前の研究を完成させるものである。

今後の展望：今後の方向としては、ヒルベルト空間における作用素とそのスペクトルの収束という形で Ramirez 等の理論を書き直すことが重要であろう。そのためにはベータ・アンサンブルというランダムな2階の差分作用素と、stochastic Airy operator という2階の微分作用素とともに特殊例とし

て含む作用素のクラスを設定し、そのクラスにおける極限定理を研究する必要があると考えている。

(3)定常点過程論の基本定理の別証明

当初の研究計画に従って「漸近的に定常な点過程」の適切な定義を考えているうちに次のような着想を得た：点過程（直線上のランダムな点配置）が「定常」であるとは、その点配置を任意の x だけずらしたものの確率分布 $P(x)$ が、もとの点配置の確率分布 P に一致することである。したがって直線上の任意の確率密度関数 $u(x)$ に従って $P(x)$ を重ね合わせた確率分布 $P(u)$ も P と一致する。この発想に基づいて定常点過程論の3つの基本定理 (Khintchine, Dobrushin および Koroilyuk の定理) に新しい証明を与えることができた。また必ずしも定常でない点過程を上記の $P(u)$ の形の確率測度の下で観測するとき、その Palm 測度の一般形を与えることができた。証明の方法は、確率空間上の積分（平均）と直線上のルベグ積分とを Fubini の定理に従って順序交換することにより自然に見出される。

成果の位置づけとインパクト：この成果は本来の研究目的を達成するというより、その試みの課程で生じた副産物である。点過程論の文献は極めて多いため、上記の「新しい証明」も本当に新しいかどうかを調べ尽くすことができなかったため、発表媒体としては査読のない大学紀要を選んだ。

今後の展望：「漸近的に定常な点過程」の、スペクトル統計にとって適切な定式化は未完成である。厳密に解析できるスペクトル統計の具体例を積み重ねることと、理論・応用確率論の各分野の専門誌に散在する点過程論の文献を幅広く渉猟することにより、スペクトル統計の枠組み作りを今後も試みたい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

南就将、水野洸太、南隆二、異なる接触頻度を持つ個体からなる人口集団における感染症流行のモデル化について、慶應義塾大学日吉紀要. 自然科学、査読無、No.53 (2013. 3), p.23- 44

http://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN10079809-20130331-0023

Nariyuki Minami, New proofs of some basic theorems on stationary point processes, 慶應義塾大学日吉紀要. 自然科学, 査読無, No.52 (2012. 9), p.37- 47,

http://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN10079809-20120930-0037

Nariyuki Minami, Energy level statistics: a formulation and some examples,

RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, B27, 2011, 79-97

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/open/B27/pdf/B27-07.pdf>

[学会発表](計 6 件)

南就将, Definition and self-adjointness of the stochastic Airy operator, 日本数学会年会、2014年3月15日、学習院大学(豊島区目白)

Nariyuki Minami, Definition and self-adjointness of the stochastic Airy operator, International Conference on Mathematical Physics of Disordered Systems, 2013年5月16日、Fern Universitaet in Hagen (Germany)

南就将, ランダム作用素に対するスペクトル統計、研究集会「数理物理と確率論」、2012年3月14日、湘南国際村センター

南就将, New proofs of some basic theorems in stationary point process theory, 研究集会「ランダム作用素のスペクトルと関連する話題」、2011年12月1日、京都大学人間・環境学研究科棟

Nariyuki Minami, Statistics for the unfolded spectrum of lattice Anderson models, The Second Mathematical Conference in Kairouan, 2010年11月5日, Hotel Continental-Kairouan (Tunisia)

南就将, ランダム・シュレーディンガー作用素の基礎, Summer School 数理物理 2010, 2010年8月26 - 28日、東京大学数理科学研究科大講義室

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等
<http://user.keio.ac.jp/~minami/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

南 就将 (MINAMI, Nariyuki)
慶應義塾大学・医学部・教授
研究者番号：10183964

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

小谷 眞一 (KOTANI, Shinichi)
関西学院大学・理工学部・教授
研究者番号：10025463

上木 直昌 (UEKI, Naomasa)
京都大学・大学院人間・環境学研究科・
教授
研究者番号：80211069

中野 史彦 (NAKANO, Fumihiko)
学習院大学・理学部・教授
研究者番号：10291246

永尾 太郎 (NAGAO, Taro)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・
教授
研究者番号：10263196

牧野 浩典 (MAKINO, Hironori)
東海大学・情報理工学部・准教授
研究者番号：40338786