

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 20 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540216

研究課題名（和文）複合構造をもつ領域上のラメ作用素の固有値問題

研究課題名（英文）Eigenvalue problem of the Lamé operator on a domain with a multi-structure

研究代表者

神保 秀一（JIMBO SHUICHI）

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：80201565

研究成果の概要（和文）：弾性体の振動特性を表すラメ作用素の固有値問題を解析した。細い（特異的な）領域やそれらを接合した領域の固有値の漸近挙動を記述する極限固有値問題を得た。それらは局所的には 1 次元のグラフ上の 4 階の常微分作用素の固有値問題になり、頂点においては複雑な両立条件を有する。また、弾性係数が退化するようなラメ作用素の固有値問題の漸近解析を行い、極限系を得た。極限系は流体力学に現れるストークス作用素の固有値問題となる。そして境界条件としてディリクレ条件またはスリップ境界条件が現れる。

研究成果の概要（英文）：I studied the eigenvalue problem of the Lamé operator, which is obtained from the oscillation property of elastic body. I dealt with the complex domain which is a union several thin regions. The limit system when the thickness goes to zero, is a 4th order ODE system with a complicated compatibility conditions on the vertices. I also dealt with the eigenvalue problem of a certain Lamé operator with the low stiffness coefficient. I obtained the limit system, which is related with the eigenvalue problem of the Stokes operator in a fluid dynamical problem with the Dirichlet condition or the slip boundary condition.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
2012 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学，大域解析学

キーワード：ラメ作用素，固有値問題，領域変形，複合構造

1. 研究開始当初の背景

我々が日常で直接体験する現象の代表例は音や光および物体の運動があげられるが、前

者は波動，後者は力学的運動であるが弾性体の変形運動は、上の 2 つの要素を併せ持つ現象として多様な様相を呈する。弾性体の運動は連続体力学において弾性方程式として記述され理論は有る意味確立されている。しか

し、このことは必ずしも多様にある弾性現象

が解明されていることを意味しない。近年の地球物理や建造物の工学的な研究により興味ある現象が見いだされている。よってそれらのある弾性方程式の中にある数学現象として捉える試みによって応用数学的な見地から偏微分方程式の豊かな発展につながると期待できる。特に本研究では実用からも大事な物体の振動特性や振動モードに的を絞り研究する。

2. 研究の目的

弾性体の振動特性は弾性体方程式の主部に現れるラメ作用素の固有値に対応する。本研究で扱う場合は実用の観点から重要な棒や板および液状物体などがあり、これらはを表す弾性体方程式(偏微分方程式)の境界値問題には際立った特徴がある。前者では領域が3次元でありながら非常に細いあるいは薄い、後者では弾性係(剛性率)が極めて小さい、これらはラメ作用素が退化する特異振動問題であるため、固有値の挙動の解析は困難が現れる。このような領域の退化の問題や係数の退化の場合において固有値の漸近挙動を考える。さらにはこのような性質の異なる複数の弾性体を接合して組み合わせてできる複合的弾性体の振動特性を研究するこれがメインの研究目的である。それによって弾性体相互の作用も研究する。

3. 研究の方法

複合構造をもつ弾性体の課題についてラメ作用素の特異振動的固有値問題の固有値および固有関数の漸近挙動を解析する。研究の過程で、

(1)工学的観点からの数学的定式化(境界条件

や係数の検討)、

(2)特殊解の計算、

(3)マッチングと近似解作成、

(4)変分法(最大最小原理による評価)、エネルギー法や比較関数などによるアプリオリ評価、

(5)弱形式、

など組み合わせた摂動解析を行う。これらは偏微分方程式論の歴史において蓄積されてきた数学的技術である。これらをフルに活用して固有値や固有関数の漸近解析を行う。

4. 研究成果

(1)特異的な領域変形とラメ作用素等の楕円型作用素の固有値や周辺の課題について漸近解析的研究を行った。細い棒状や薄い板状の弾性体の振動のスペクトル問題についてはCiarletらの先行研究でかなり前に研究されていたが今回それらを組み合わせて出来る弾性体について同様の解析をした。3次元の問題から薄い極限の問題(スケルトン上の問題)への還元および極限問題の定式化および正当化を行った。ラプラシアンや反応拡散方程式の問題についての、このような研究は小杉聡史の一連の仕事により10数年に得られている、ラメ作用素の場合の今回の研究はそれらの一般化に位置すると見なせる。細い棒状領域を組み合わせた領域の問題においては極限システムは複数の有限線分上の4階常微分作用素と頂点上の両立型境界条件からなる。元々の問題において小さい固有値は領域の薄さの2乗のオーダーを持つが、この微小部分を繰り返して拡大することで極限問題を再現することができこの極限の固有値問題は工学的な還元版モデルとの関連を解析した。

(2)固定領域上でのラメ作用素の固有値問題において剛性率が変数係数の場合にこれが部分的に退化する場合の極限の固有値を解

析した。固有値の漸近挙動を特徴付ける極限問題において退化領域上のストークス方程式の固有値問題が現れることがわかった。これによって弾性体の液状化した振動問題と流体力学のある種の固有値問題との関連性があることがわかりストークス作用素の新しい課題に結びついた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

① S. Jimbo, Hadamard variation for electromagnetic frequencies, Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, R. Magnanini et al. (eds), INdAM series 2 (2013) 179-200, Springer (査読有).

② N. Honda, Multi-specialization and multi-expansions, Advances in Mathematics 232 (2013) 432-498 (査読有).

③ S. Jimbo, A. Morrasi, G. Nakamura, K. Shirota, A non destructive method for damage detection in steel-concrete structures based on finite eigendata, Inverse Problems in Science and Engineering 20 (2012) 233-270 (査読有).

④ N. Honda, G. Morando, Stratified Whitney jets and tempered ultradistributions on the subanalytic site, Bulletin di la Societe Mathematique de France, 139 (2011) 389-435 (査読有).

⑤ T. Aoki, N. Honda, Geometric properties of the Riemann surface associated with Noumi - Yamada system with a large parameter, J. Math. Soc. Japan 63 (2011), 1085-1119 (査読有).

[学会発表] (計 15 件)

① 中村 玄, 一数学者の出会った弾性方程式族の諸問題, 北海道大学数学教室談話会, 2月7日, 2013年.北海道大学

② S. Jimbo, Domain variation and electromagnetic frequencies, 14th North Eastern Symposium on Mathematical Analysis, Tohoku University (Sendai), Feb.18 - 19 / 2013.

③ 神保 秀一, Regular domain variation and electromagnetic frequencies, 日本数学会関数方程式分科会一般講演, 九州大学 (福岡市), 9月18日-21日, 2012年

④ 神保 秀一, 弾性体方程式の固有値に関する特異摂動問題, 第8回非線形の諸問題, 宮崎県婦人会館(宮崎市), 9月11日-13日, 2012年.

⑤ S. Jimbo, Domain variation and electromagnetic frequencies, Nonlinear Partial Differential Equations, Dynamical systems and their Application, RIMS Kyoto University (Kyoto) Sep.3-6 /2012.

⑥ 神保 秀一, 領域変形と楕円型作用素の固有値摂動問題, 偏微分方程式セミナー, 北海道大学, 7月4日, 2012年.

⑦ 神保 秀一, 薄い領域上のラプラシアン
の固有値問題, 偏微分方程式セミナー, 北海道大学, 5月7日, 2012年.

⑧ 神保 秀一, 弾性体方程式に現れる固有値の特異摂動問題, 変分問題セミナー首都大学 3月16日, 2012年.

⑨ S. Jimbo, Eigenvalues of the Elliptic operator including a large nonlocal term, Seoul Univ.-Hokkaido Univ. Joint seminar, Seoul National University November 16-17/ 2011.

⑩ S. Jimbo, Domain variation and electromagnetic frequencies, INdAM workshop on Geometric properties for parabolic and elliptic PDE's, Cortona, Italy, June20-24/2011.

⑪ 神保 秀一, Domain variation and

electromagnetic oscillation, 洞爺湖解析セミナー, 洞爺山水ホテル和風 (洞爺湖町) 9月28日-29日, 2010年.

⑫ 本多尚文, 仮想変わり点の幾何とストークス係数, 日本数学会関数方程式分科会特別講演, 名古屋大学, 9月22日-25日, 2010年.

⑬ N. Honda, Virtual turning points and Stokes coefficients, Recent developments in Resurgent Theory and Related Topics, RIMS, Kyoto University (Kyoto), June 28/2010.

⑭ S. Jimbo, Singular perturbation of domains and the characterization of the behavior of the eigenvalues in several elliptic operators, 2010 NCTS workshop on Calculus of Variation and related topics, NCTS, National Tsinghua University, Taiwan, May 6-8/2010.

⑮ 神保秀一, 特異的領域変形と PDEs, 第4回現象数理若手シンポジウム『パターン・ウェーブ』, 明治大学, 4月23日 - 24日, 2010年.

[図書] (計1件)

① 神保秀一, 本多尚文, 数学書房, 位相空間, 2011年, 230ページ.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

神保 秀一 (JIMBO SHUICHI)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号: 80201565

(2) 研究分担者

本多 尚文 (HONDA NAOFUMI)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号: 00238817

中村 玄 (NAKAMURA GEN)

北海道大学・ - ・名誉教授
研究者番号: 50118535

(3) 連携研究者
なし