

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 3 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540225

研究課題名（和文） 幾何学的力学系理論の応用と展開

研究課題名（英文） Application of and development in geometric mechanics

研究代表者

岩井敏洋（Iwai Toshihiro）

京都大学大学院情報学研究科・教授

研究者番号：10021635

研究成果の概要（和文）：

微分幾何学的手法で、(1) 猫の宙返りモデルのポートハミルトン形式での定式化と制御、及び計算機内での宙返りの実現、(2) 対称性群の両側変換のもとでの線形変形体の古典及び量子力学の簡約化、(3) 回転群の離散部分群のもとで不変な、2次元球面上で定義されたパラメータ付きエルミート行列に付随する固有空間バンドルのチャーン数のパラメータ依存性、(4) 行列の特異値分解に対応するリーマン幾何学的最適化問題の解法、(5) その他の課題をそれぞれ研究した。

研究成果の概要（英文）：

Differential geometric methods are applied to the studies of (1) the modeling of the falling cat as a port-controlled Hamiltonian system along with a realization of a somersault as an animation, (2) the reduction of the classical and quantum mechanics of a linearly deformable body by two-sided symmetry group action, (3) the parametric dependence of Chern numbers of the eigen-line bundles associated with eigenvalues of a parametric family of Hermitian matrices which are defined on the two-sphere and invariant under a discrete subgroup of the rotation group, (4) a Riemannian optimization approach to the singular value decomposition of matrices, and (5) some other projects.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	900000	27000	1170000
2011年度	700000	21000	910000
2012年度	700000	21000	910000
総計	2300000	59000	2990000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学、幾何学

キーワード：力学系、幾何学的力学系理論

## 1. 研究開始当初の背景

幾何学的力学系理論とは、微分幾何学の概念を活用して力学系を理論的に研究するものである。典型的な例として対称性群の作用で力学系を簡約化する Marsden-Weinstein の簡約化理論がある。研究代表者は、特に多

体力学系において回転群の対称性を用いて古典および量子力学系の簡約化理論を展開してきた。このテーマでの最初の論文 (A. Tachibana and T. Iwai, Phys. Rev. A. vol.33 (1986), pp.2262-2269) 以来、長年にわたって、変換群と接続の幾何学を用いて、多体力学系

の幾何学的理論の研究を行ってきたが、理論的な枠組みはほぼ完成していた。それによると、一見無関係に見える分子の量子力学と、猫の宙返りの古典力学、擬剛体の古典及び量子力学等を同様の幾何学的枠組みで捉えることができる。

## 2. 研究の目的

これまでの研究の幾何学的方法論をさらに深化・発展させるとともに、具体的なシステムに応用するのが本研究の目的である。

## 3. 研究の方法

(1) 具体的なシステムとして例えば猫の宙返りは、円筒が結合した系でモデル化できる。配位空間は  $SO(3) \times SO(3)$  である。このモデルはすでに研究されて来ているが、そこでのモデル方程式は全角運動量がゼロという拘束条件に制御変数を入れたもので、物理的には制御変数の次元はトルクのそれではなかった。しかし、本研究では力学的に自然な発想で、モデルはラグランジュあるいはハミルトン力学に則って定式化され、制御変数はトルクの次元をもつ。ここに、全角運動量がゼロという条件は主バンドル  $SO(3) \times SO(3) \rightarrow SO(3)$  の接続に関して平行移動するという条件と同値であることに注意しておく。モデルを円筒結合系の形状空間  $SO(3)$  上の余接バンドルにおいてハミルトン力学系として定式化した上で、最近大いに注目されている制御理論であるポート制御ハミルトン系理論をこの余接バンドルにおいて適用できるように一般化し、それをを用いて制御則を決める。その実現の様子をグラフィックスで表示する。

(2) 上述の工学的応用以外にも、幾何学的力学系理論は分子の力学にも応用が可能である。これは、簡約化の理論で、変数を早い変数と遅い変数とに分けて取り扱うことにつながる。早い変数は量子力学的に作用素として、遅い変数は古典力学的に多様体上の点として取り扱うという手法が可能である。回転群の離散部分群の2次元球面上への作用と、その既約表現とを考えて、それらの作用の下で不変なエルミート行列を球面上のハミルトン作用素と考えることができる。このとき、固有値が縮退しなければ、ひとつの固有値に付随する複素直線バンドルを球面上に定義することができる。複素直線バンドルが構成できるようなパラメータはどのような集合をなすのか。パラメータの変化に伴って、バンドルが一旦崩れて、次に再構成されるとき、チャーン数に変化が現れる。この変化量を位相的不変量として取り扱う。

(3) これ以外にも、幾何学的力学系理論の応用は多種多様である。問題に応じて手法を変える必要があるが、幾何学的な種々の概念で問題を定式化するという姿勢は一貫して

いる。ある種の制御系も最適化問題も実際に多様体上の力学系の視点から研究することができる。

## 4. 研究成果

(1) 多体系の力学の変種として、線形変形に限るが、変形体の力学を研究した。  $GL(n, R)$  への  $SO(n)XS0(n)$  の左右からの作用のもとでの簡約化と相対的平衡解の安定性条件を論じた。

(2) 同じく、 $n=3$  の場合に対応する量子力学系の簡約化を論じ、簡約化されたハミルトン作用素の境界での挙動を論じた。

(3) 一般化剛体の古典力学と量子力学を  $SL(2, R)$  と  $SU(2)$  のユニタリー表現を利用して研究した。その副産物として、対称コマのシュレーディンガー方程式が変数分離方で解けることの表現論的意味が明らかになった。

(4)  $D_3$  の対称性 (正3角形の対称性) をもつ2準位準量子系に付随する固有空間バンドルのチャーン数をパラメータに依存して変わる様子を明らかにした。

(5) 同じく  $O_8$  の対称性 (正8面体の対称性) をもつ2準位準量子系に付随する固有空間バンドルのチャーン数のパラメータ依存性を論じた。

(6) ネコの宙返りを、連結2円柱モデルで定式化して、ポート制御ハミルトン系の考え方で制御入力を求めた。その結果としてモデルの宙返りを実現した。

(7) 微分幾何学と微分方程式論の制御理論への応用として、ラグランジュ力学系における入力との関係を論じた。特にこの制御系が配位平坦であるための十分条件を求めた。

(8) MIC-Kepler 問題の摂動論を、対称性群のリー代数上のポアソン力学の形で論じ、さらに第一摂動系の周期解の安定性を論じた。

(9) リーマン多様体上の最適化問題の形で行列の特異値分解を論じ、この手法の解が高精度であることを実証した。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計9件)

- ① T. Iwai, The geometry and mechanics of generalized pseudo-rigid bodies, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, vol. 43, 2010, 095206 (28pp), 査読有  
Doi:10.1088/1751-8113/43/9/095206
- ② T. Iwai, Classical and quantum mechanics of pseudo-rigid body in three dimensions, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, vol. 43, 415204 (32pp), 査読有  
Doi:10.1088/1751-8113/43/41/415204

- ③ T. Iwai and D. Tarama, Classical and quantum dynamics for an extended free rigid body, *Differential Geometry and Its Applications*, vol.28, 2010, 501-517, 査読有  
Doi:10.1016/j.difgeo.2010.05.002
- ④ T. Iwai and B. Zhilinskii, Energy Bands: Chern number and symmetry, *Annals of Physics*, vol.326, 2010, 3013-3066, 査読有  
Doi:10.1016/j.aop.2011.07.002
- ⑤ T. Iwai and B. Zhilinskii, Rearrangement of energy bands: Chern numbers in the presence of cubic symmetry, *Acta Applicande Mathematicae*, vol.120, 2012, 153-175 査読有  
Doi:10.1007/s10440-012-9694-2
- ⑥ T. Iwai and H. Matsunaka, The falling cat as a port-controlled Hamiltonian system, *Journal of Geometry and Physics*, vol.62, 2012, 279-291, 査読有  
Doi:10.1016/j.geomphys.2011.10.018
- ⑦ K. Sato and T. Iwai, Configuration flatness and Lagrangian control systems with fewer controls than degrees of freedom, *Systems and Control Letters*, vol.61, 2012, 334-342, 査読有  
Doi:10.1016/j.sysconle.2011.11.007
- ⑧ T. Iwai and S. Matsumoto, Poisson mechanics for perturbed MIC-Kepler problems at both and negative energies, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol.45, 2012, 365203(43pp) 査読有  
Doi:10.1088/1751-8113/45/36/365203
- ⑨ H. Sato and T. Iwai, A Riemannian optimization approach to the matrix singular value-decomposition, *SIAM journal of Optimization*, vol.23, 2013, 188-212, 査読有  
Doi:10.1137/120872887

[学会発表] (計 3 件)

- ① T. Iwai, Poisson mechanics treatment of perturbed Kepler problems at negative and positive energies, *Symmetry and Perturbation Theory 2011*, June 2011, Otranto (Italy)
- ② B. Zhilinskii and T. Iwai, Rearrangement of energy bands: Chern numbers in the presence of symmetry, *Symmetry and Perturbation Theory 2011*, June 2011, Otranto (Italy)
- ③ 岩井敏洋, Chern numbers associated with two- and three-level semi-quantum

systems with  $D_3$  and  $O$  symmetries, 九州大学幾何学セミナー, 2013

[図書] (計 1 件)

「宙返りの奥儀--幾何、力学、制御」、数理の玉手箱、遊星社, 2010

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :  
国内外の別 :

○取得状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
取得年月日 :  
国内外の別 :

[その他]

ホームページ等  
退職に伴いホームページ閉鎖

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

岩井敏洋 (IWAI TOSHIHIRO)

京都大学大学院情報学研究科・教授

研究者番号 : 10021635

### (2) 研究分担者

なし ( )

研究者番号 :

### (3) 連携研究者

該当なし ( )

研究者番号 :