様 式 C－１９、F－１９、Z－１９ （共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　５ 月 ２０ 日現在

機関番号：３４４１２
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2014
課題番号：２２５４０２３８

研究課題名（和文）多孔性媒質中の流体現象をモデル化した保存則系の数学解析

研究課題名（英文）Matheamtical Analysis of conservation laws modeling fluids in porous media

研究代表者
浅倉　史興（ASAKURA, Fumioki）

大阪電気通信大学・工学部・教授

研究者番号：２０１４０２３８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題の目的は、油・水・気体の混合流体の運動をあらわす偏微分方程式における、不連続解の研究である。このような偏微分方程式とその解の研究は、石油の2次回収技術：すなわち、水と気体(空気または二酸化炭素)を多孔性の岩盤にある油槽に注入して石油を抽出する技術の進展に重要となる。このような混合流体の数学的な研究に基づいて、混合気体や電離気体における衝撃波の大域的な挙動を研究した。これら2つの研究においては、エントロピー関数の構成と解析が決定的な役割を持つ。

研究成果の概要（英文）： The purpose of this study is to understand discontinuous solutions of partial differential equations that come from secondary recovery techniques: injecting water and gas (air or CO2) for the extraction of petroleum in a oil reservoir which is contained in porous rock formations. Based on these mathematical studies, global behavior of shock waves in mixed gas and ionized gas is studied, where the construction and study of entropy functions play a crucial role.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：偏微分方程式　双曲型保存則系　衝撃波　エントロピー　混合気体

１．研究開始当初の背景

石油の 2 次回収においては，各種のシミュレーションと経験により，液体と気体を交互に注入するのが効果的であることが知られている（WAG 法）．したがって，油層を含む砂岩のような多孔性媒質のなかで，石油，液体，気体の混合流体がどのような流れを形成するかを知ることは，石油の 2 次回収を最も効果的に行うために重要なことである．

多孔性媒質における多相流体現象においては，各流体相の流率は圧力の勾配に比例すると考えられ（Darcy の法則），圧力は各流体相の圧力と多孔性媒質による毛細管圧　の和である．また，現象を記述する動学モデルは，各流体相の質量保存則を表す粘性保存則系である．

毛細管圧を無視した双曲系モデルの数学的な研究は，Glimm, Marchesin, Temple, Trangenstein, Holden 等によって 1980-90 年代に活発になされた．とくに，元のモデルを多重双曲点の近くで近似した，２次流束密度モデルについては：Schaeffer- Shearer (CPAM,1987) による分類理論，Schaeffer-Shearer (Trans.AMS,1987), Issacson-Marchesin-Plohr-Temple (SIAM. Appl. Math., 1988) による Riemann 問題の基礎理論と数値解，Gomes (Adv.Appl.Math.,1989) による不完全圧縮衝撃波の許容条件の研究などが有名である．

しかし，これらの研究においては，双曲系の分類理論や特性理論のような幾何学的理論はあるものの，いちばん単純な Riemann 問題の解ですら数値的に求められているのみである．例えば，Hugoniot 曲線上で，どの部分が許容的な衝撃波を表すかというような，重要な問題についても、数学解析はほとんど行われていなかった．おそらく，基礎的な幾何学的理論と数値シミュレーションにより，最も効果的な 2 次回収法が確立されたのであろう．

研究代表者は 2002 年頃より，Yamazaki と２次流束密度モデルについて共同研究を開始し，直接的な代数計算と有理 3 次曲線の理論によりにより，衝撃波の Lax 許容条件が成立する範囲を確定した (IMA J. Appl. Math. 2005)．さらに，(J. Hyp. Dif. Eq. , 2009)においては，Lax 許容条件が成立する場合の粘性進行波解の存在，および，許容的な不完全圧縮波が存在するときに，Lax 許容条件が成立しても粘性進行波解が存在しない条件を得た．これは，Gomes が提起した問題の完全解決である。しかし，後者の問題設定において，粘性は通常の強い拡散項であって，最初のモデルにおけるような，毛細管圧でない．

一方，研究代表者は，気体の運動方程式を波面追跡法 (wave-front tracking) を用いて大域解の存在を証明する試みを続けてきた．最初の結果として，等エントロピー気体について、大域解の存在定理を得た(Quart. App. Math. 2005)．無限個の等温相がある気体の運動方程式については，Peng（Ann. Scuola Norm. Pisa, 19934）の研究の後，Amadori-Corli (SIAM J. Math. Anal. 2008) により，大域解の存在が証明された．しかし，等温層不連続の量についての条件が分かりにくく，より簡明な条件がもとめられていた．これについては，Corli との 共同研究により，ある程度の結果を得ていた．

一方，Polytoropic 気体運動方程式の大域解は Liu (Indiana J. Math. 1978)により既に得られているが，解の構成には Glimm の差分法が用いられていて，論文は難解である．

２．研究の目的

多孔性媒質における多相流体現象をモデル化した保存則系の双曲部分は，一般的には単純双曲系にならず，双曲型保存則系の標準理論(Lax 理論)が適用できない．さらに，放物部分（拡散行列）は対称化可能ではあるが，双曲部分と同時に対称化可能かどうか不明で，さらに 2-単体の形をした状態空間の境界で退化する．したがって，放物部分も標準理論（川島理論）が適用できるかどうか分からない．この研究の第 1 の目的は：
多孔性媒質中の 3 相流体モデルについて，多重双曲部分に対する放物部分の許容条件を明らかにし，粘性保存則系の衝撃波の大域的な存在と，その安定性を示すことである．
また，この研究が目標とするところは

(1) 平面単体の形をした状態空間における特性方向場と Hugoniot 条件の大域的な解析を行い，積分曲線群と Hugoniot 曲線群を決定する
(2) 上記の状態空間における拡散行列の大域的な解析により，多重双曲系部分に対する放物系部分の許容条件を明らかにする．

無限個の等温相がある気体の運動方程式については，各相においては等温気体であるので(従って，等エントロピー)，解の大域的存在は確立されている．しかし，一つの波は無限個の相境界と相互作用を起こすので，その相互作用量が評価できる条件を課す必要がある．

等温気体の運動方程式においては，波の相互作用は平面上であるが，polytropic 気体においては空間的である．したがって，相互作用量の評価はきわめて複雑になる。この研究の第 2 の目的は：
運動方程式においては、リーマン不変量を用いて解を評価し，無限個の相境界との相互作用量に関する無次元量を求める．また，Polytropic 気体については，波面追跡法により大域解の存在を証明することである。また、目標とするところは

(1) リーマン不変量による，局所相互作用量評価を行い，モデルに適した大域的な相互作用用ポテンシャルを構成する
(2) 大域的相互作用量評価を得て，波面追跡

法により大域解を構成する
(3) 上記の考察を，polytropic 気体の運動方程式に適用する．

３．研究の方法

多孔性媒質における 3 相流体モデルについては
(1) 平面単体の状態空間におけるモデル方程式系の流速密度は 2 次有理関数なので，Asakura-Yamazaki によりなされた 2 次流束の場合(2 次整関数)の研究手法が用いられる．2 次整関数であれば，関数の正負は零点とその位数を調べれば良い．有理関数の場合は零点と極の考察となる．この場合も，Hugoniot 曲線が有理曲線となることが重要である
(2) Majda-Pego (1985)の研究をもとにして，状態空間における力学系の軌道を追跡する．軌道の葉層構造は，擬似 2 相流曲線の両側で変化するので，すでに得られている，擬似 2 相流曲線の挙動を用いる．

無限個の等温相がある気体の運動方程式については
(1) リーマン不変量を用いて，波の振幅を測る無次元量を導入し，振幅を評価する
(2) 大域的評価には，研究代表者が開発した径路分解法を用いる．等エントロピー気体の運動方程式については，2 次の相互作用量は 1 次の作用量に含めて評価できたが，今回の場合は，1 次の相互作用量に関する径路をプライマリー・パス，2 次の相互作用量に関するものをセコンダリーパスとして，分けて分解することが必要となる．プライマリー・パスは等温気体と同様に評価し，セコンダリー・パスはその摂動と考える
(3) Polytropic 気体については，1 次の衝撃波とエントロピー波の評価は，等エントロピー気体と同様である．相互作用により新たに 1 次の衝撃波およびエントロピーが生成されるのは，同じ方向の衝撃波と膨張波の相互作用で，膨張波が生成されるのは，2 つの衝撃波の相互作用のみであることに注目する。

４．研究成果

多孔性媒質における 3 相流体モデル方程式(2 次有理流速密度)については
(1) すべての擬似 2 相流曲線は直線となり，総流動性は多重双曲点最大となることを示した
(2) 各々の擬似2相流曲線が1-膨張波曲擬似 2 相流曲線線，2-膨張波曲線，1-衝撃波曲線，2-衝撃波曲線のいずれになるかの判定条件を得て，さらに，衝撃波については，それらが，圧縮波，過圧縮波，不完全圧縮波のいずれになるかの判定条件を得た
(3) 方程式は多重双曲点を持つので，大域的な 1-膨張波曲線と 2-膨張波曲線を構成するのは困難であるが，状態空間(平面単体)の 2 重被覆面上では構成され，さらに，エントロピー関数も大域的に構成することができる
(以上の結果は，14th International Conference on Hyperbolic problems: Theory, Numerics and Applications, 2012 (Padova)
の一般講演で発表された)．

無限個の等温相がある気体の運動方程式については
(1) 無次元量で振幅を評価することにより，等温層不連続を表す無次元量を導入し，その量が付帯条件のもとである限界以下ならば,大域解が存在することを示した([雑誌論文](4))．解の構成は波面追跡法により，評価には径路分解法を用いる．また，[雑誌論文](1)においては，(4) で用いた付帯条件を簡略化した
(2) の手法を用いて，Polytoropic 気体運動方程式の大域解を波面追跡法により構成した。やはり，評価には波面追跡法をもちいる([雑誌論文](2))．Liu の難解な論文は，[雑誌論文](2)の方法により，かなり理解しやすくなったと思われる．なお，Liu の論文ではいくつかの補題が準備されているが，証明が省略されている部分も多い．これらの，完全証明を与えているのが，[雑誌論文](3)である．すべての数学分野を扱う研究雑誌の査読を受けて発表できたので，発表の意義を認められたと考えている．

研究課題と関連して，電離単原子気体の運動方程式を考察して，いくつかの熱力学的な結果を得た．運動方程式は，気体定数 5/3 の polytropic 気体であるが，電離度αが未知関数となる．したがって，通常の熱力学の第 2 法則に加えて，Saha の電離法則をみたすとする．
(1) 物理的エントロピー関数を構成し，電離度 α と絶対温度 T の平面における，特性ベクトル場の積分曲線(等エントロピー曲線)を決定した
(2) 真性非線形性を持たない領域があることを示し，$\alpha = T = 0$ の近傍において，境界の漸近形を求めた
(3) α，T 平面において，Hugoniot 曲線を求めた．T は α の増加関数であることを示した．また，基点 α_0 より大きな α においては，圧力は α の増加関数，比体積は α の減少関数であることを示した
(4) $T \to \infty$ の高温極限では，モデルは polytoropic 気体に近くなり，等エントロピー曲線は，α = 一定の曲線となる．また，物理的エントロピーと異なる関数(擬エントロピー関数)を用いれば，それをエントロピー関数とする，polytropic 気体の運動方程式となる．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　4　件）
(1) ASAKURA, Fumioki – CORLI, Andrea, The Path Decomposition Technique for System of Hyperbolic Conservation Laws, to appear Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2015, (査読あり, 掲載決定, 巻号未定)
(2) ASAKURA, Fumioki – CORLI, Andrea, Wave Front Tracking for the Equations of Non-Isentropic Gas Dynamics, (with A. Corli), Annali di Matematica Pura ed Applicata, 196 (2015), pp 581–618,査読あり
(3) ASAKURA, Fumioki, Wave-Front Tracking for the Equations of Non-Isentropic Gas Dynamics -- Basic Lemmas --, Acta Mathematica Vietnamica, Vol. 38, Issue 4, pp 487-516, 2013, 査読あり
(4) ASAKURA, Fumioki – CORLI, Andrea, Global Existence of Solutions by Path Decomposition for a Model of Multiphase Flow, Quarterly of Applied Mathematics, 71 (2013) 135-182, 査読あり

〔学会発表〕（計　2　件）
(1) ASAKURA, Fumioki, Path Decomposition Method Applied to the Equations of Polytropic Gas Dynamics, Taiwan-Japan Joint Conference on PDE and Analysis, December 26-28, 2012, Taipei, ROC
(2) ASAKURA, Fumioki, Stone-Marchesin Model Equation of Three -Phase Flow in Oil Reservoir Simulation, 14th International Conference on Hyperbolic problems: Theory, Numerics and Applications, June 25-29, 2012, Padova, Italy

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
浅倉　史興（ASAKURA, Fumioki）
大阪電気通信大学・工学部・教授
研究者番号：20140238

(2)研究分担者
（　　　）

研究者番号：

(3)　連携研究者

研究者番号：

(4)　研究協力者
①　CORLI, Andrea
Department of Mathematics, University of Ferrara, Italy, Associate professor

② TREVISA, Konstantina
Department of Mathematics, University of Maryland, USA, Professor