

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 22 日現在

機関番号：82723

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540241

研究課題名（和文） 超離散化積分系の等位集合の大域構造

研究課題名（英文） Global level set structure of ultradiscrete integrable systems

研究代表者

高木 太郎（TAKAGI TAICHIRO）

防衛大学校・応用科学群・准教授

研究者番号：00531766

研究成果の概要（和文）：周期的可積分セルオートマトンの等位集合に関する分配関数のフェルミ型公式と呼ばれる、組合せ論の分野における新しい数学公式を発見し証明した。また、古典可積分系として有名な戸田格子の特殊な離散化であるトロピカル周期戸田格子に対して、二色の帯によるセルオートマトン的な記述を考案し、それを用いてこの力学系の相空間構造の決定に重要な可換なフェイズフロー（一般化された時間発展）を構成することに成功した。

研究成果の概要（英文）：We found and proved a new mathematical formula in the field of combinatorics. That is called a fermionic formula for partition functions associated with level set of a periodic integrable cellular automaton. By inventing a cellular-automaton-like description in terms of two colored strips, we also succeeded to construct a family of commuting phase flows (generalized time evolutions) in tropical periodic Toda lattice, a special discrete limit of well known Toda lattice in the field of classical integrable systems. The phase flows are important to determine the structure of the phase space of this dynamical system.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	800,000	0	800,000
2011 年度	600,000	0	600,000
2012 年度	600,000	0	600,000
総計	2,000,000	0	2,000,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：可積分系，セルオートマトン，量子群

1. 研究開始当初の背景

（1）1990 年代より KdV 方程式や戸田方程式のソリトン解の性質を再現するような 1 次元セルオートマトン（箱玉系）が研究されていた。この力学系は、一つの側面として、連続的な古典可積分系に対する時間・空間変数の離散化により得られる離散可積分系から、さらに従属変数の離散化を行なうことができる「超離散」力学系という特色を持つものであり、もう一つの側面としては、統計力学の 2

次元可解格子モデルの低温極限という特徴づけを持つものであった。

（2）後者の発展として 2000 年頃には量子群の結晶基底の理論を応用した同様の性質を持つ「可積分」セルオートマトンの系統的な構成が成されていた。これらの 1 次元セルオートマトンは、その研究の当初は両端が無遠くまで伸びているという境界条件のみが扱われていたが、2000 年頃から周期境界条件を持つ系（周期箱玉系）の研究が始まる。し

図4. フェルミ型公式

ここで、上の式は非周期的境界の場合の分配関数の公式であり、本課題の研究代表者により2005年に得られたものである。下の式が周期境界の場合の公式であり、今回はじめて得られた新しい結果である。非周期境界の場合における分配関数のフェルミ型公式は、アフィン・リー代数と呼ばれる概念に関連して一般化されたものが多数存在している。一方、周期境界の場合における分配関数のフェルミ公式を与えた論文は過去には存在せず、本研究が唯一のものである。

本研究は、英国物理学会刊行 (IOP) の学術誌に掲載された論文から「新規性、重要性ならびに今後の研究への潜在的な影響力」に関する秀逸性を基準として選出される IOP select に選ばれている。

(2) 超離散化とトロピカル化は同じ意味で用いられることが多いが、ここでは区別する。すなわち、トロピカル化とは有理式で与えられる方程式において掛け算を足し算に、割り算を引き算に、足し算をminに置き換えて、区分離線方程式を得ることであると、超離散化とはトロピカル化に加えて従属変数を離散的な値に制限することとする(論文②)。

このような概念の識別を行なった場合、従来、超離散周期戸田格子(もしくは方程式)と呼ばれていた対象は「トロピカル周期戸田格子(tropical periodic Toda lattice, trop p-Toda)」と呼ぶのが適切であると考えられる。以下ではこの名称を用いる。今回、trop p-Toda における可換な時間発展(あるいはフェイズ・フロー)の族の構成に初めて成功した(論文①)。これは、超離散可積分系である可積分セルオートマトンを特殊ケースとして含むトロピカル可積分系の等位集合の大域構造を解明する上で重要な進歩である。

Trop p-Toda の時間発展は次のような方程式で与えられる。

$$Q_j^{t+1} = \min(W_j^t, Q_j^t - X_j^t)$$

$$W_j^{t+1} = Q_{j+1}^t + W_j^t - Q_j^{t+1}$$

$$X_j^t = \min_{0 \leq k \leq N-1} \left(\sum_{l=1}^k (W_{j-l}^t - Q_{j-l}^t) \right)$$

図5. Trop p-Toda 方程式

ここで、 Q, W は従属変数であり、 t は離散時間、 j は離散的な空間座標で周期 N の周期性を持つ。すべての Q, W に同じ定数を加えても

方程式の形は不変で、またある時刻に Q, W が正の値をとれば次の時刻でも正となるのが簡単に分かる。この事実より、この力学系は二色の帯を用いて「セルのないセルオートマトン」として視覚化・実現することが可能であることが分かる。これは、セルオートマトンである周期箱玉系を特殊ケースとして含む力学系である。

具体的には、長さ Q の黒セグメントと、長さ W の白セグメントを交互に並べてできる二色の帯を、時間発展にしたがって上から下に向かって配置し実現した。例を図6に示す。

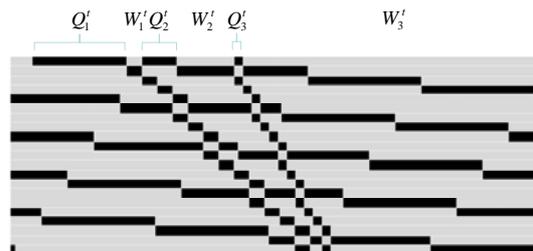


図6. 二色の帯による trop p-Toda

これは一見すると周期箱玉系とよく似ているが、各セグメントの長さは整数に限定されおらず、任意の正の実数でよいという点が異なっている。図6で示したのは図5で与えた区分離線方程式による時間発展である。この時間発展と可換な時間発展の例を図7に示す。

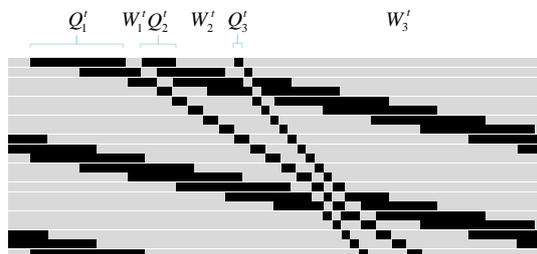


図7. Trop p-Toda の可換な時間発展

黒セグメントが縦に重なり合っている点が元の時間発展との違いを特徴付けている。

量子群の結晶基底を幾何学化した幾何クリスタルの理論において双有理的な纏絡写像が構成されており、その超離散化としてクリスタルの組合せ論的な纏絡写像が得られることが知られていた。本研究では超離散化はせずにトロピカル化のみを行なって得られる纏絡写像の満たすヤン・バクスター関係式を用いるというアイデアにより、上述の二色の帯による記述と合わせて可換なフェイズフローの構成を行なった。

この力学系については、ラックス形式に基づく離散周期戸田方程式の保存量のトロピカル化を使って定義される「スペクトル曲線」の滑らかさ(ソリトンの振幅に重複がな

いこと)の仮定のもとに、ヤコビ多様体のトロピカル化として等位集合を記述するという先行研究があるが、可換なフェイズフローの構成法については知られていなかった。

結果は論文①として出版し、国外および国内学会において発表した。今年度も2件の国際会議で発表が予定されるなど一定の関心を集めている。この結果を基にして、スペクトル曲線の滑らかさを仮定しない場合の等位集合の大域構造に関して研究が進展中であり、近い将来に新しい結果を公表できる予定である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

- ① Taichiro Takagi, Commuting Time Evolutions in the Tropical Periodic Toda Lattice, Journal of the Physical Society of Japan, 査読有, Vol. 81, 2012, 104005-1~7
- ② Rei Inoue, Atsuo Kuniba, Taichiro Takagi, Integrable structure of box-ball systems: crystal, Bethe ansatz, ultradiscretization and tropical geometry, Journal of Physics A, 査読有, Vol. 45, 2012, 073001(64pp)
- ③ Atsuo Kuniba, Taichiro Takagi, Fermionic partition functions for a periodic soliton cellular automaton, Journal of Physics A, 査読有, Vol. 44, 2011, 135204(22pp)

[学会発表] (計10件)

- ① 高木 太一郎, オイラーの幸運数とセルオートマトンのエルゴード性, 日本物理学会第68回年次大会, 2013年3月26日, 広島大学東広島キャンパス
- ② 高木 太一郎, トロピカル周期戸田格子における可換な時間発展, 日本数学会2012年度秋季総合分科会, 2012年9月19日, 九州大学伊都キャンパス
- ③ Taichiro Takagi, A family of commuting time evolutions in the tropical periodic Toda lattice, Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems 2012, 2012年7月10日, Orthodox Academy of Crete (ギリシャ)
- ④ 高木 太一郎, 周期的超離散戸田格子における可換なフェイズフロー, 日本物理学会第67回年次大会, 2012年3月24日, 関西学院大学西宮上ヶ原キャンパス
- ⑤ Taichiro Takagi, Level set structure of the periodic box-ball system, Tropical Geometry and Integrable

Systems, 2011年7月7日, University of Glasgow(英国)

- ⑥ 高木 太一郎, 周期箱玉系の等位集合, 数理物理・物性基礎論セミナー (招待講演), 2011年6月18日, お茶の水女子大学
- ⑦ 高木 太一郎, 国場 敦夫, fermionic partition functions for a periodic cellular automaton, 日本数学会2011年度年会, 2011年3月21日, 早稲田大学 (震災により中止されたが講演は成立扱い)
- ⑧ 高木 太一郎, 国場 敦夫, 周期箱玉系の分配関数とフェルミ型公式, 日本物理学会2010年秋季大会, 2010年9月26日, 大阪府立大学中百舌鳥キャンパス
- ⑨ Taichiro Takagi, Level set structure of a soliton cellular automaton and combinatorics of Bethe ansatz, XXIV IUPAP International Conference on Statistical Physics, 2010年7月20日, Cairns Convention Center (豪州)
- ⑩ Taichiro Takagi, Fermionic partition functions for a periodic soliton cellular automaton, Combinatorics and Mathematical Physics, 2010年7月13日, The University of Queensland (豪州)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高木 太一郎 (TAKAGI TAICHIRO)
防衛大学校・応用科学群・准教授
研究者番号: 00531766