

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 25 日現在

機関番号：12102

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2010～2012

課題番号：22650001

研究課題名（和文） 代数的グラフ書換理論に基づく折紙のモデル化と折紙プログラミング

研究課題名（英文） Formalization of origami and origami-programming based on algebraic graph rewriting

研究代表者

井田 哲雄（IDA TETSUO）

筑波大学・名誉教授

研究者番号：70100047

研究成果の概要（和文）：

折紙における「折る」過程を研究し、以下の成果を得た。

- (1) 折る過程を抽象的に表現する代数的グラフ書換系を定義し、グラフ書換を記述・実行する言語処理系を開発した。
- (2) グラフ書換操作から代数系へと変換するアルゴリズムの開発とその正当性の検証を行った。
- (3) 研究の進展に応じてコンピュータによる折紙実行システムの拡張を行い、折紙幾何定理の証明の高速化と多くの定理の自動証明を可能とした。

研究成果の概要（英文）：Abstraction of paper fold (origami) and establishment of a formal theory of fold are our ultimate goal. Towards that goal, we formalized origami by algebraic graph rewriting theory and verified certain geometrical properties of origami. The results we obtained are as follows:

- (1) We develop a graph rewriting language for origami and its interpreter.
- (2) In order to concretize the graph rewriting to be used to simulate actual origami and to verify geometrical properties, we developed algorithms for transforming basic folds to algebraic expressions.
- (3) In parallel with the above developments we extended and improved e-origami system Eos that we have developed. The extension enables us to automatically verify more geometrical theorems and to speed up the computation of proving.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,200,000	0	1,200,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
2012年度	700,000	210,000	910,000
総計	2,800,000	480,000	3,280,000

研究分野：情報学

科研費の分科・細目：情報学基礎・情報学基礎理論

キーワード：計算折紙論、記号計算、書換え系、自動幾何定理証明、制約問題、代数的グラフ書換え系、グロブナ基底計算

1. 研究開始当初の背景

形に関する科学技術は身近な学問であり、その発展が端的に応用に結びつくことが多い。なかんずく、折紙の科学は形の科学の中でもユニークな位置を占め、その発展は様々な波及効果をもつ。折紙は日本の伝統工芸でもあり、また折り畳みの技術を考える上での抽象的な幾何モデルともなる。折紙の研究は近年国際的に大きな盛り上がりを見せ、数多くの折紙に関する成書が国際的に発刊されるに至っている。折紙をテーマとする国際会議も開催されている。折紙研究の最先端では、折紙をコンピュータで表示する技術、構造体として解析する研究、自動車工学（エアバック等）、宇宙工学（アンテナ等）への応用など、折紙の個々の側面に関しての進歩は著しい。しかしながら、折紙の構築をアルゴリズム化してとらえ、折ることのプロセスをプログラムとして考究する見方が希薄である。我々は折紙の折り方の数理論的な側面の研究を通して、折紙を広く幾何オブジェクトの計算の体系としてとらえたいとし、本研究を開始した。

2. 研究の目的

本研究の目的は、折紙を計算論的な観点から分析し、折る対象としての折紙および折紙を折る過程を代数的グラフ書換え理論を駆使してモデル化し、折紙を幾何オブジェクトの構築プログラミングとして解析・記述する枠組みを構築することである。

3. 研究の方法

本研究では折紙を構成論的に捉える。すなわち、創作される作品のコンピュータへの表示だけでなく、折紙がどのような数学的な構造を持ち、「折られる」ことによって、構造がどのように変換されていくか、またどのような折紙の変形が可能であるかを、代数的グラフ書換え理論に基づいて厳密に解明した。形に関する科学技術の推進には、実際の形状の構築あるいはコンピュータによる可視化は欠くことができない。また、可視化に伴う理解なしに厳密かつ高度な研究を推進することは非常に困難である。幾何学は我々の直感を阻み、挑戦をはねのけるところがある。そのため、本研究では折紙構築・証明支援系の構築と定理証明支援系の効果的な援用を同時に行った。これによって、折紙プログラミングが厳密さとともに、実際に具体的な意味

を持つ。我々の先行研究により、Eos (E-origami system) と呼ぶ折紙構築・証明支援系の基礎的な部分はすでに使用可能な状況になっており、さらに、本研究によって得られた新しい知見をも盛り込んだ新しいシステムをも構築した。

4. 研究成果

具体的には研究成果は次の通りである。

- 代数的グラフ書換え理論の構築。グラフ書換え系の形式化と必要な補題の定理証明支援系を援用した証明：

折紙は、面の集合を台集合とし、その上に隣接関係、重なり関係という二つの二項関係をもつ代数ととらえられる。この代数系を折り操作によって、変換していくというのが基本的考え方である。この変換過程を抽象的にとらえるために、抽象書換え系の概念を用いて、理論を展開した。これを抽象折紙系と呼ぶ。

- 代数的グラフ書換え系を定義し、グラフ書換えアルゴリズムを記述・実行するためのグラフ書換え言語の設計と実装：

抽象折紙系は、折紙の構成を俯瞰するには強力な理論的枠組みであるが、これを具体的に計算折紙へと持って行き、視覚に訴えつつ実際にコンピュータ上で折紙を行い、理論および応用への展開を図るには、抽象度が高すぎる。そこで、抽象折紙系からラベル付き代数的ハイパーグラフという構造を定義し、抽象折紙系を、この代数的グラフ書換え系へと変換した。この代数的グラフ書換え系での、グラフ書き換え操作が、折紙の折り操作に対応するよう定義した。従って、折紙の折り操作は、グラフ書き換えの操作で、完全に形式化できた。しかし、グラフの書き換え操作は、複雑な数式を処理するような、代数・記号的な操作を含むため、グラフアルゴリズムを厳密にしかも形式的に記述実行する処理系が必要となった。本研究では、この代数的グラフ書換え系の言語とその処理系を設計・実装し、厳密性を損なうことなく、折り操作を考察することができるようになった。

- 抽象折り操作をグラフ書換え操作で具体化するための、代数系への変換に関するアルゴリズムの開発：

グラフ書換えの最終段階で、グラフの

ノードとなっている折紙面に、幾何的な情報（たとえば、面の凸多面体の端点の座標値など）を与え、書換で得られた折紙の列全体から、数値計算あるいは、グローバル基底の計算ができる、有理関数を係数とする多項式系を生成する。このアルゴリズムはEosシステムにも実装されていたが、これをさらに体系的に再度開発した。Eosシステムはコンピュータ代数システムMathematicaを主に使用して、開発しているが、一部のコードについては、プログラム検証系を用いて、厳密な形式化と、コードの正しさを証明しつつ進めた。プログラム検証系には、証明支援系 Isabelle/HOL と Coq を活用した。いずれか一つの定理証明支援系を駆使すれば、本研究には十分であったが、論理体系の違いに伴う記述力を比較・検討するために当初は、二つの支援系を用いた。最終的には、Isabelle/HOL で主な形式化とプログラムの正当性の検証を行った。

- 研究の進展に応じた Eos システムの拡張：

折り操作、代数系への変換、幾何定理証明のいずれの段階においても、プログラムの高度化や高速化が常に課題となり、多くの研究時間がこれに費やされたが、この文脈における本研究での最も特徴的な研究成果には、ProofDoc (Proof Document) の生成が挙げられる。ProofDoc は、折紙の構築から構築された折紙図形の性質の証明に至るまでの、すべての段階で、Eos システムがどのような推論を行っているかを、人間が読みやすいような文書の形にしたものである。Eos システムは自動的にこれを生成する。ProofDoc により、複雑な証明に伴う論理的、代数的、あるいは記号的操作を読み取ることができるようになり、折紙定理証明の研究が非常にやりやすくなった。

- 実例に当たり、折紙の創作プロセスを折紙プログラムとして記述し、折紙に関する幾何の知識ベースの拡充：

本研究の期間中に、古典的な折紙作品の製作や、折紙による初等幾何学の（折紙による作図と）定理証明を行い、ProofDoc により、その結果をウェブページ等で随時発表してきた。ウェブでの組織的な公表には多大な労力を必要とするため、データベースの包括的な整理は今後の課題である。

以上に述べた具体的な成果は、次のような波及的な効果を持つと考えられる。

- 折ることの幾何学的な意味を深めるこ

とができ、折り畳み技術を最先端の技術へと進化させるための方法論の一つが構築できた。

- Eos システムは、本研究者らが 10 年以上かけて開発しているシステムであるが、Eos システムがさらに進化したと考えられる。いずれは、計算折紙に興味を持つより多くの研究者、あるいは折紙に興味をもつ市民や学生に使用できるよう利用環境を整えていきたい。また、本研究で得られた知見は、論文の形で公表しており、Eos システムに限ることなく、より高度なコンピュータ折紙環境の構築に有用であると考えられる。
- コンピュータ・プログラミングと幾何オブジェクトの作成とが結びつき、教育現場の様々なレベルで、構成的な考え方が折紙のように実際に手で触れることができるものを通して教えることができる。このためには、Eos システムのような、実際に使えるソフトウェアツールの存在がきわめて有効であると思われる。
- 幾何オブジェクトの構成的な側面からみた知識ベースの組織化が進展する。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① Ida, T., Interactive vs. Automated Proofs in Computational Origami, Proceedings of 14th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC 2012), IEEE Computer Society, 査読無 (招待講演), 2012, 7
- ② Kasem. A, Ghourabi. F, and Ida. T., Origami Axioms and Circle Extension, Proceedings of the 26th Symposium on Applied Computing (ACM/SAC 2011), 査読有, 2011, 1106-1111
- ③ Ida. T., Kasem. A, Ghourabi. F, and Takahashi. H, Morley's theorem revisited: Origami construction and automated proof, Journal of Symbolic Computation, 査読有, 46, 2011, 162-170
- ④ Ghourabi. F, Ida. T., and Kasem. A, Proof Documents for Automated Origami Theorem Proving, Lecture Notes in Computer Science (post-proceeding of the 8th International Workshop on Automated Deduction in Geometry (ADG 2010)), 査読有, 6877巻, 2011, 78-97
- ⑤ Kaliszyk. C, and Ida. T., Proof Assistant Decision Procedures for Formalizing Origami, Lecture Notes in Computer Science (proceedings of the Co

ference on Intelligent Computer Mathematics (CICM' 11)) 査読有, 6824巻, 2011, 45-57

- ⑥ 高橋英和, 井田哲雄, グラフ書換による計算折り紙のモデル化と実現, コンピュータソフトウェア, 査読有, 27, 2010, 2 - 13

[その他]

ホームページ等

www.i-eos.org

6. 研究組織

(1) 研究代表者

井田 哲雄 (Ida Tetsuo)

筑波大学・名誉教授

研究者番号: 70100047