様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 13 日現在

機関番号：32606
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2010～2012
課題番号：22654006
研究課題名（和文）結び目のアレキサンダー多項式と整数論

研究課題名（英文）Alexander polynomials of knots and number theory

研究代表者
中島 匠一（NAKAJIMA SHOICHI）
学習院大学・理学部・教授
研究者番号：90172311

研究成果の概要（和文）：本研究の基本方針は、主としてアレキサンダー多項式と岩澤多項式の対比を通じて、結び目理論と代数的整数論における類似を考察することである。両者の間の具体的な対応関係を追及した結果､類似が成立する対象をいくつか特定することができた。また、結び目理論から整数論への貢献を想定して､アレキサンダー多項式の零点の数値計算を進めた。

研究成果の概要（英文）：The purpose of our research is to find analogies between knot theory in topology and Iwasawa theory in number theory, focusing on comparison of Alexander polynomials (topology side) and Iwasawa polynomials (number theory side). Studying both objects in detail, we reached some good correspondence between them. Further, aiming at finding a new property of Iwasawa polynomials through comparison to Alexander polynomials, we carried out numerical computation of zeros of Alexander polynomials.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	800,000	0	800,000
2011 年度	600,000	180,000	780,000
2012 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総　計	2,100,000	390,000	2,490,000

研究分野：代数学

科研費の分科・細目：数論

キーワード：結び目、岩澤理論

１．研究開始当初の背景

(1) 位相幾何学における結び目理論は近年急速に発達したが、その中で、結び目理論と代数体の整数論の間に強い類似があることが発見された。この類似は、Kapranov, Reznikov, 森下昌紀氏などによってほぼ同時期に注目され多くの成果が得られた。その結果、このテーマは数論的位相幾何学（arithmetic topology）と呼ばれるまでに成長した。数論的位相幾何学の基本的視点は、結び目の補空間と有限次代数体との類似の考察にあり、この視点は主に森下氏によって深く研究されている。

(2) 代数的整数論においては、有限次代数体

の（ある条件をみたす）巡回拡大の無限系列を研究対象とする岩澤理論が大きな成果を上げていて、岩澤理論が考察対象とする代数体の性質を集約するものとして岩澤多項式がある。そして、岩澤多項式の次数は整数論の重要な研究対象で数多くの成果が得られている。しかし、さらに踏み込んで、岩澤多項式の係数や零点の詳しい性質を知ろうとしても、それを調べる良い方法が知られておらず、ほとんど何もわかっていない状態である。研究代表者は岩澤理論の周辺の研究に携わっており、この状況を何とか打開したいと考えていた。

(3) 位相幾何学において、代数体の拡大にあたるものは被覆空間であり、結び目の補空間は、自然な無限次の巡回被覆を持っている。そして、その無限次の巡回被覆の様子を記述する対象として、結び目のアレキサンダー多項式があり、結び目理論では、アレキサンダー多項式について数多くの研究がある。したがって、数論的位相幾何学の視点からは、アレキサンダー多項式と岩澤多項式を対比させることは、自然な発想である。

(4) (3)に述べた対比は多くの研究者が共有するものであるが、実際に考察を進めようとすると、位相幾何学と整数論の事情の違いが現れて、両者の間の具体的な対応は一義的には定まらず、いくつもの「考え方」があることが明らかになる。つまり、数論的位相幾何学の視点は優れたものだが、実際には、「具体化」は簡単ではない、というものであった。

２．研究の目的

(1) 代数体の岩澤理論は、もともと代数曲線の理論と深く関わって進展したものであるが、上記の「背景」に述べたように、結び目理論との関連も生じている（数論的位相幾何学）。つまり、現在では、次の

(A) 代数体の岩澤理論（岩澤多項式）
(B) 結び目理論（アレキサンダー多項式）
(C) 代数曲線の理論（合同ゼータ関数）

という３つの対象の間に類似があることが判明している。（ただし、３つの中で、(A)と(C)の類似は非常に古典的であり、多くの成果がある。）本研究の目的は、(A)と(B)の類似を詳しく研究することによって、それぞれの分野に新しい視点をもたらすことである。また、(A)と(B)との類似を調べることによって、従来あまり注目されなかった(B)と(C)との類似を明らかにすることも目的の１つである。

(2) 上記のような類似を考察するのは、他の研究分野との類似を通じて、過去の研究では見逃されていた新しい手法を導入できる可能性がある、という理由からである。実際、古典的な類似である(A)と(C)からは大きな成果が得られている。今回、(B)の分野を考察に加えることによって、それぞれの分野に新たな研究手法を導入するのが、研究の大きな目的である。

３．研究の方法

(1) 「目的」で挙げた(A)(B)(C)の研究分野には、それぞれの分野固有の優れた手法が存在している。本研究では、各分野について、その分野の独自の成功を収めるために有効であった研究手法に着目し、その手法を他の分野に適用することで、新しい成果を挙げることを目指した。それぞれの分野でどのような手法に注目したかは、「成果」の項で述べる。

(2) 研究代表者はもともと整数論の研究者であるため、結び目理論の内容を理解し、研究に結びつけるに至るまでのハードルが高いことが予想された。実際に、結び目理論の「言葉」を理解し、結び目理論の基本事項を使いこなせるようになるのは非常に困難であった。その過程では、本研究の経費によって結び目理論の文献を数多く購入できたのは有益であった。また、結び目理論の研究集会に参加し、講演を聞いたり質問をしたりすることができたのも非常にありがたかった。さらに、研究経費を利用して、トロント大学の村杉邦夫（名誉）教授と名古屋工業大学の平澤美可三准教授と交流する機会を何度も設定し、自由に質問する機会をもてたことは、とても有効であった。

(3) 結び目理論の研究成果によって、コンピューターを利用すれば、（比較的容易に）アレキサンダー多項式を計算することができる。また、計算機の性能向上によって、与えられた多数の多項式の（複素）零点をすべて求めることも十分可能になっている。
整数論において岩澤多項式の零点の研究手法がなく、零点の性質も明らかになっていないことから、まず、アレキサンダー多項式の零点の性質を調べ、それとの類似を通じて岩澤多項式の零点の性質を明らかにできる、という期待ができる。そのために、本研究の特徴として、結び目のアレキサンダー多項式を求め、その零点を調べる、という計算を実行した。結び目理論の専門家に相談したり、いろいろな試行錯誤をおこなった結果、計算の対象としては２橋結び目（＝有理結び目）がちょうどよいことがわかり、２橋結び目を研究対象とした。
実際の計算には、汎用の数式処理ソフトであ

る Maple（カナダの maplesoft 社の製品で、世界的にも評価の高いソフトウェア)を利用し、さらに、本研究の経費で、この計算専用の Apple 社製のコンピューターを導入して、計算をおこなった。

４．研究成果

(1) 「目的」に挙げた(A)(B)(C)の理論の成功の理由として、それぞれ

(A) 完備群環Λ（ラムダ）の導入、解析的類数公式
(B) （ザイフェルト曲面から得られる）ザイフェルト行列、アレキサンダー多項式の行列式表示
(C) 合同ゼータ関数、ヴェーユ・ペアリング（複素数体上では、リーマン行列に対応）

が挙げられる。（もちろん、各理論はもっと広がりを持っているが、ここでは、本研究で注目したものだけを取り上げている。）
今回の研究では、それぞれのものが、他分野でどのような類似をもつかを研究し、具体的な対応物の想定をすることができた。
残念ながら、結び目理論の理解の困難さなどから、結び目理論と整数論（つまり、(B)と(A)(C)）の類似を通じて実際に新しい定理を証明するには至っていないが、各分野間の類似の考察が新しい研究方向を与えるために有効であることは明らかになったといえる。以下、本研究で明らかになった事柄を列挙する。

(2) ((A)と(B)の関連) 岩澤多項式はある（コンパクトな）Λ加群（岩澤加群）の特性多項式として得られる。結び目理論において、同様の考えでアレキサンダー多項式を定義する方法も知られているが、その方法では、一般の結び目の場合に、アレキサンダー多項式と岩澤多項式に類似があるといえるかは不明確である。理由は、一般の結び目では、岩澤加群にあたる加群が有限生成にならないからである。
類似を作るにあたってのこの困難を乗り越えるには、結び目としてファイバー結び目だけを考察の対象とするのが良い、という結論に至った。ファイバー結び目であれば、アレキサンダー多項式が被覆空間のホモロジーから定まる加群の特性多項式として捉えられ、岩澤多項式との類似が完全であるといえる。また、ファイバー結び目であれば、アレキサンダー多項式の零点は代数的整数となり、整数論的考察に適している。この意味で、アレキサンダー多項式の零点の数値計算（「目的」の(3)参照）において、ファイバー結び目の場合のデータを集中的に集めるのが効果的であると思われる。（この計算は現在進展中であり、まだまとまっていない。）

(3) ((A)と(B)の関連) 数論的位相幾何学では、代数体のイデアル類群の類似は（3次元）多様体のホモロジー群であることが確立している。この観点からすると、アーベル拡大に関してイデアル類群の位数を与える公式である「解析的類数公式」は、結び目の補空間の巡回被覆空間のホモロジー群の位数を与える公式に対応する。そのような「ホモロジー群の位数を与える公式」として Mayberry-Murasugi の公式（M-M 公式）があることを知ったが、そこに現れる係数（整数になることがわかっている）には不明な点が多い。そこで、M-M 公式と解析的類数公式との類似を詳細に考察すれば、M-M 公式の整数の「解釈」が可能だと思われる。また、M-M 公式の特別な場合を無限次被覆空間を使って記述した作間誠氏の仕事がある。作間氏の定式化は岩澤理論との類似性が明確で、それによって、岩澤多項式の零点の意味付けができる可能性がある。（これらの事柄にたどり着いたのは最近であり、具体的な成果は今後の課題である。）

(4) ((B)と(C)の関連) 有限体上の代数曲線の場合には、定数体の拡大に対応する体の拡大が無限次の巡回被覆に対応しており、そこから合同ゼータ関数が定まる。代数体の岩澤多項式は、ある意味で、この合同ゼータ関数の類似だと考えられる。この視点からは、アレキサンダー多項式は合同ゼータ関数の類似と想定できる。
合同ゼータ関数の場合には、曲線のヤコビ多様体のヴェーユ・ペアリングが重要な役割を果たし、合同ゼータ関数の零点の絶対値が決定された。結び目の場合に、ヴェーユ・ペアリングに相当するものは何なのかが不明であった。しかし、最近、ブランチフィールド・ペアリングの存在に行き当たった。ブランチフィールド・ペアリングを利用すれば、アレキサンダー多項式の合同ゼータ関数の類似としての解釈の深化が可能であると想定できる。しかし、これも具体的な記述は今後の課題となっている。

(5)（零点の計算）整数論の視点からは、岩澤多項式の零点の「意味付け」が興味深い問題である。ただ、この問題には、整数論からの固有の研究方法が見当たらない。そこで、結び目理論との類似を通じてこの問題にアプローチすることが期待される。
しかし、結び目理論においても、Hoste 予想などの数値計算からの観察があるだけで、アレキサンダー多項式の零点に関する明確な理論は構築されていない。とはいえ、アレキ

サンダー多項式の零点がコンピューターで容易に計算できることは、岩澤多項式の場合と異なる大きなメリットである。そこで、本研究では、理論間の類似を考察する前に、結び目理論の「内部」で、アレキサンダー多項式の零点の実例計算をおこなった。
結び目に何の条件も付けなければ、非常に広範な多項式がアレキサンダー多項式として現れるので、一般の結び目のアレキサンダー多項式を考察対象とすることにはあまり意味がない。つまり、整数論との類似につなげるためには、結び目のクラスをうまく（＝整数論と相性が良いように）限定する必要がある。結び目研究者に相談を持ちかけた結果、「交代結び目」が候補に上がった。しかし、さらに、計算のしやすさやパラメーターが明確であることなどから、実験対象としては（交代結び目の中でも、特に）「2 橋結び目」を選ぶこととした。
2 橋結び目のアレキサンダー多項式を計算する方法としては、2 橋結び目を決定する有理数の連分数展開の係数から計算する方法と、有理数の分母・分子から直接計算する村杉-平澤のアルゴリズムの 2 つを採用した（もちろん、結果は一致するが、それを検算として利用した）。実際の計算は数式処理ソフト Maple でおこない、データを収集した。
集まったデータは、ファイバー結び目に限定する、有理数の分母を限定する、などの条件を設定して、各種のデータ処理を行っている。まだ明確な法則を発見するには至っていないが、データは今後公開して行く予定である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

６．研究組織
(1)研究代表者
中島 匠一（NAKAJIMA SHOICHI）
学習院大学・理学部・教授
研究者番号：90172311