

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月17日現在

機関番号：17102

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2010～2012

課題番号：22654009

研究課題名（和文） 周期的極小曲面、平均曲率一定曲面の安定性と分岐に関する研究、及び、他分野への応用

研究課題名（英文） Stability and bifurcation for periodic minimal surfaces and surfaces with constant mean curvature, and applications to other fields

研究代表者

小磯 深幸 (KOISO MIYUKI)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授

研究者番号：10178189

研究成果の概要（和文）：平均曲率一定曲面または非等方的平均曲率一定曲面に対するいくつかの固定境界または自由境界問題に対し、解または安定解の存在・一意性・幾何学的性質、体積または（非等方的）平均曲率を変化させたときの解の対称性の変化、位相的性質の変化、分岐の状況、個々の解の安定性を決定した。さらに、一般の固定境界または自由境界問題に対する分岐理論を構築した。また、非等方的表面エネルギーに対する凸性の仮定をはずすことにより、ローレンツ・ミンコフスキー空間内の平均曲率一定超曲面を含む広いクラスの超曲面を非等方的平均曲率一定超曲面として統一的に扱い、新しい一意性定理や例を構成した。

研究成果の概要（英文）：We studied surfaces with constant mean curvature and surfaces with constant anisotropic mean curvature with free or fixed boundary. We obtained results about existence, uniqueness, geometric properties of solutions or stable solutions. Also, we obtained sufficient conditions for the existence of bifurcation and criterion of the stability for each surface in the bifurcation branch. Moreover, by removing the convexity assumption for the anisotropic surface energy, we studied uniformly a large class of surfaces including constant mean curvature surfaces in the Lorentz-Minkowski space and obtained a new uniqueness theorem and examples.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	900,000	0	900,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2012年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,600,000	510,000	3,110,000

研究分野：微分幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：極小曲面、平均曲率一定曲面、分岐理論、安定性、非等方的平均曲率一定曲面、Wulff 図形、ローレンツ・ミンコフスキー空間、非等方的極小曲面

1. 研究開始当初の背景

平均曲率一定超曲面は、与えられた境界条件を満たし囲む体積を変えない任意の変分に対する面積の臨界点である。平均曲率一定曲面は、このような任意の変分に対して面積

の第二変分が非負の時に「安定である」といい、そうでない時に「不安定である」という。さて、ナノスケールあるいはミクロスケールの自然現象には、しばしば周期的な曲面が現れることが多く、その幾何学的構造を明らか

にすることは非常に重要である。たとえば、二種類の高分子 A、B が連結された重合体より成る AB ブロック共重合体や微小な液滴は、近似的に安定な平均曲率一定曲面とみなすことができる。また、一般相対論におけるブラックホールやブラックストリングの境界もまた平均曲率一定曲面超曲面とみなすことができるため、周期的平均曲率一定超曲面の安定性の研究が理論物理学者によってもなされている。しかしながら、これらの研究においては、対象の安定性や幾何学的性質についての厳密な（数学的な）研究はまだあまり行われておらず、数値計算によるものが中心である。一方、研究代表者はこれまで幾何学的変分問題の解の大域的性質、存在と一意性、安定性、摂動について研究してきており、上述のようなナノ、マイクロ、マクロスケールの自然現象の解明に寄与できると思われた。

2. 研究の目的

上述のように、平均曲率一定超曲面は、与えられた境界条件を満たし囲む体積を変えない任意の変分に対する面積の臨界点である。面積汎関数よりも一般に、曲面の各点の向きに依存して決まるエネルギー密度関数の曲面上での積分を、非等方的表面エネルギーと呼ぶ。曲面が囲む体積を保つ変分に対する非等方的表面エネルギーの臨界点は非等方的平均曲率一定曲面と呼ばれるものになり、平均曲率一定曲面の一般化となっている。本研究では、平均曲率一定曲面または非等方的平均曲率一定曲面に対するいくつかの具体的な固定境界または自由境界問題に対し、解または安定解の存在・一意性・幾何学的性質、体積または（非等方的）平均曲率を変化させたときの解の対称性の変化、位相的性質の変化、分岐の状況、個々の解の安定性を決定する。さらに、一般の固定境界または自由境界問題に対する分岐理論を構築する。また、得られた結果を具体的な物理現象に応用し、その数学的な基礎付けを与える。

3. 研究の方法

(1) 面積の第 2 変分に付随する 2 階楕円型線形作用素に対する固有値問題の固有値の性質及び零固有値に属する固有関数の性質を解析し、Crandall-Rabinowitz による分岐理論を一般化して応用することにより、平均曲率一定曲面に対する固定境界問題に対し、囲む体積または平均曲率をパラメータとした時の解の分岐が存在するための十分条件を求め、分岐前後の解の安定性の判定法を定める。

(2) (1) と同様の研究を、平均曲率一定曲面に対する自由境界問題に対して行う。

(3) (1)、(2) を、非等方的平均曲率一定曲面に対して一般化する。

(4) (1)、(2)、(3) の結果を具体的な変分問題に対して応用する。

(5) 平行な二平面上に自由境界をもつ曲面の非等方的表面エネルギーの臨界点について、安定解を決定する。

(6) 固定境界を持つ曲面の非等方的表面エネルギーの臨界点について、境界が単純な場合に対して安定解を決定する。

(7) 非等方的表面エネルギーに対する凸性の仮定をはずすことにより、ローレンツ・ミンコフスキー空間内の平均曲率一定超曲面を含む広いクラスの超曲面を非等方的平均曲率一定超曲面として統一的に扱い、新しい一意性定理や例を構成する。

(8) 平行ではない二平面上に自由境界をもつ曲面の面積の臨界点について、安定解を決定する方法をみつける。

4. 研究成果

(1) 囲む体積を保つ変分に対する面積の臨界点である平均曲率一定曲面（やその一般化、高次元化）について、平均曲率または体積をパラメータとする解の分岐が起こるための十分条件、分岐前後の解の安定性を判定する方法、対称性の崩壊現象が生じるための条件を得た。さらに、それらを Riemann 多様体上の等周問題や、物理現象と関連の深い境界値問題に応用した。

(2) 物理実験に動機を得た周期的平均曲率一定曲面に対する自由境界問題についての研究を行い、境界条件が単純な場合（自由境界が平面で濡れエネルギーが 0 の場合）については安定解を決定した。さらに、濡れエネルギーが 0 で自由境界が二つの平行でない平面である場合についても、安定性を判定する方程式を具体的に得た。本研究は、境界条件の変化に対する解空間の不安定性を与える極めて興味深い例を与えると予想され、さらに、たとえば微小な液滴の形状のような物理現象解明への応用も期待されるものである。

(3) 曲面の各点の向きに依存して決まるエネルギー密度関数の曲面上での積分を、非等方的表面エネルギーと呼ぶ。曲面が囲む体積を保つ変分に対する非等方的表面エネルギーの臨界点は非等方的平均曲率一定曲面と呼ばれるものになり、平均曲率一定曲面の一般化となっている。同じ体積を囲む閉曲面全体の中で非等方的表面エネルギーの最小値

を与えるものは Wulff 図形 (と呼ばれる閉曲面に相似) である。3次元ユークリッド空間内の円周を境界とする種数0の非等方的平均曲率一定曲面で安定なものは、Wulff 図形または平面の一部のみであることを、Wulff 図形の正則性及び軸対称性についての仮定のもとで証明した。

(4) 非等方的表面エネルギーに対する凸性の仮定をはずすことにより、ローレンツ・ミンコフスキー空間内の平均曲率一定超曲面を含む広いクラスの超曲面を非等方的平均曲率一定超曲面として統一的に扱い、新しい一意性定理や例を構成した。より具体的には、以下の成果を得た。3次元ユークリッド空間内の非等方的極小曲面について、エネルギー密度関数が軸対称であるという仮定のもとで、以下に述べる研究成果を得た。極小曲面であり非等方的極小曲面でもあるものは、常螺旋面に限ることを証明した。さらに、非等方的極小曲面であって管状曲面であるものの具体例を構成した。また、これらの非等方的極小曲面は、3次元ローレンツ・ミンコフスキー空間内の平均曲率零の曲面を特別な場合として含むことを示した。さらに、このような考え方は、ローレンツ・ミンコフスキー空間内の滑らかな平均曲率一定曲面で、滑らかな曲線を越えて空間的曲面から時間的曲面に型変化を起こすもの (まだ例すら知られていない未知の研究課題である) の解析を進めるために有効であると期待される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

1) Atsufumi Honda, Miyuki Koiso and Yasuhiro Tanaka, Non-convex anisotropic surface energy and zero mean curvature surfaces in the Lorentz-Minkowski space, *Journal of Math-for-Industry* Vol. 5 (2013), 73-82. 査読有. <http://j-mi.org/>

2) Miyuki Koiso and Bennett Palmer, Stable surfaces with constant anisotropic mean curvature and circular boundary, to appear in *Proceedings of the American Mathematical Society*. (Accepted for publication on June 13, 2012.) 査読有.

3) Josu Arroyo, Miyuki Koiso and Bennett Palmer, Stability of non liquid bridges, to appear in *Mathematica Contemporanea*. (Accepted for publication on May 9, 2012.) 査読有.

ication on May 9, 2012.) 査読有.

4) Miyuki Koiso and Bennett Palmer, Equilibria for anisotropic surface energies with wetting and line tension, *Calculus of Variations and PDE's* Vol. 43, No. 3 (2012), 555-587. 査読有. DOI:10.1007/s00526-011-0423-x

5) Miyuki Koiso and Bennett Palmer, Anisotropic umbilic points and Hopf's Theorem for surfaces with constant anisotropic mean curvature, *Indiana University Mathematics Journal* Vol. 59, No. 1, (2010), 79-90. 査読有. DOI:10.1512/iumj.2010.59.4164

[学会発表] (計 20 件)

1) Miyuki Koiso, Non-convex anisotropic surface energy and zero mean curvature surfaces in the Lorentz-Minkowski space, 大阪市立大学数学研究所-国立台湾大学台大数学科学中心共催 第5回国際ワークショップ「微分幾何学と幾何解析」(大阪市立大学大学院理学研究科), 2013年3月25日. (学会開催期間: 2013年3月25日-27日).

2) 小磯深幸, 非等方的平均曲率一定曲面の幾何, 研究集会「界面の数理と幾何解析」(芝浦工業大学 大宮キャンパス), 2012年11月30日, 12月1日(基調講演). (学会開催期間: 2012年11月29日-12月1日).

3) Miyuki Koiso, Stability of hypersurfaces with constant mean curvature and applications to isoperimetric problems, 偏微分方程式の解の幾何(RIMS 研究集会)(京都大学数理解析研究所), 2012年11月7日. (学会開催期間: 2012年11月7日-9日).

4) 小磯深幸, $S^1 \times R^n$ 上の等周問題 --- 分岐理論の応用 ---, 福岡大学幾何学研究会(福岡大学セミナーハウス), 2012年11月2日. (学会開催期間: 2012年11月1日-11月4日).

5) 小磯深幸, 曲線と曲面の微分幾何学の基礎 --- 諸分野への応用を念頭に ---, CREST Workshop 生体形状モデリングと幾何(東京大学大学院数理科学研究科), 2012年7月13日. (学会開催期間: 2012年7月13日).

6) Miyuki Koiso, Geometry of isoperimetric-type problems modeled on interfaces on micrometre scale, Workshop on Geometry of Interfaces and Capillarity(グラナダ大学, スペイン), 2012年6月26日. (学会開催期間: 2012年6月25日-27日)

).

7) 小磯深幸, 等周問題型変分問題の幾何解析, 日本数学会 2012 年度年会・企画特別講演 (東京理科大学), 2012 (平成 24) 年 3 月 26 日.

8) Miyuki Koiso, Bifurcation and stability for solutions of isoperimetric problems, Workshop “Isoperimetric problems, space-filling, and soap bubble geometry”, International Center for Mathematical Sciences, Edinburgh, UK, 2012 年 3 月 19 日 (学会開催期間: 2012 年 3 月 19 日-3 月 23 日)

9) 小磯深幸, 幾何学的変分問題の大域解析とナノ-マイクロ物質の形態解明への応用, 越境する数学 ~さきがけ第二期生 研究成果報告会~ (東京大学 弥生講堂・一条ホール, 主催: JST「数学と諸分野の協働によるブレークスルーの探索」領域), 2011 年 12 月 20 日 (学会開催期間: 2011 年 12 月 20 日).

10) Miyuki Koiso, Pitchfork bifurcation for hypersurfaces with constant mean curvature, The 10th Pacific Rim Geometry Conference 2011 Osaka-Fukuoka (December 1-5, Osaka City University, December 7-9, Kyushu University), 2011 年 12 月 7 日 (学会開催期間: 2011 年 12 月 1 日-12 月 9 日).

11) 小磯深幸, 非等方的平均曲率一定曲面の基礎理論, 広島幾何学研究集会 2011 (広島大学大学院先端物質科学研究科), 2011 年 10 月 6 日 (学会開催期間: 2011 年 10 月 5 日-10 月 7 日).

12) 小磯深幸, 非等方的平均曲率一定曲面の安定性解析と物理現象への応用, 研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2011」(東京理科大学神楽坂 森戸記念館), 2011 年 9 月 2 日 (学会開催期間: 2011 年 9 月 2 日-9 月 3 日).

13) Miyuki Koiso, Stability of surfaces with constant anisotropic mean curvature and applications to physical phenomena, III Encontro Paulista de Geometria (Sao Paulo, Brazil), 2011 年 8 月 9 日 (学会開催期間: 2011 年 8 月 8 日-8 月 12 日)

14) 小磯深幸, 非等方的平均曲率一定曲面の幾何, 日本数学会 2011 年度年会・企

画特別講演 (早稲田大学理工研究院), 2011 年 3 月 20 日.

15) Miyuki Koiso, Stability of hypersurfaces with constant anisotropic mean curvature and its applications, Spanish-Japanese Workshop on Differential Geometry (グラナダ大学, スペイン), 2011 年 2 月 14 日 (学会開催期間: 2011 年 2 月 14 日-2 月 18 日)

16) Miyuki Koiso, Morse index, stability, and bifurcation theory for variational problems for hypersurfaces with constraint, The Third International Workshop on Differential Geometry (佐賀大学), 2011 年 1 月 17 日 (学会開催期間: 2011 年 1 月 17 日-1 月 18 日)

17) Miyuki Koiso, Geometric variational problems and bifurcation theory, 2010 Global KMS International Conference (POSTECH, Pohang, Korea). Invited Lecture. 2010 年 10 月 22 日 (学会開催期間: 2010 年 10 月 22 日-10 月 23 日).

18) Miyuki Koiso, Geometry of hypersurfaces with constant anisotropic mean curvature, Workshop on Hypersurfaces Geometry and Integrable Systems, (東北大学川井ホール), 2010 年 8 月 25 日 (学会開催期間: 2010 年 8 月 24 日-8 月 27 日).

19) Miyuki Koiso, Stability and bifurcation for surfaces with constant mean curvature and their generalizations, 16th School of Differential Geometry (Sao Paulo, Brazil), 2010 年 7 月 13 日 (学会開催期間: 2010 年 7 月 12 日-7 月 16 日).

20) Miyuki Koiso, Stability and bifurcation for surfaces with constant mean curvature and their generalizations, Oberwolfach workshop “Progress in Surface Theory”, Oberwolfach, Germany, 2010 年 5 月 6 日 (学会開催期間: 2010 年 5 月 2 日-5 月 8 日).

[その他]

ホームページ等

http://www.imi.kyushu-u.ac.jp/academic_staffs/view/86

6. 研究組織
(1) 研究代表者

小磯 深幸 (KOISO MIYUKI)
九州大学・マス・フォア・インダストリ研
究所・教授
研究者番号：10178189

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

山田 光太郎 (Yamada Kotaro)
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：10221657

庄田 敏宏 (Shoda Toshihiro)
佐賀大学・文化教育学部・准教授
研究者番号：10432957

藤森 祥一 (Fujimori Shoichi)
岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号：00452706

川久保哲 (Kawakubo Satoshi)
福岡大学・理学部・助教
研究者番号：80360303