

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年5月17日現在

機関番号：14401

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2010～2012

課題番号：22654015

研究課題名（和文） 経験確率の情報理論的研究

研究課題名（英文） Information theoretic study of empirical probability

研究代表者

藤原 彰夫 (FUJIWARA AKIO)

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：30251359

研究成果の概要（和文）：経験確率の情報理論的研究を行い，以下の研究成果をあげた．1）有限型かつ準対称な divergence 関数を用い，2つの計算可能な確率測度に対する新たな Martin-Loef ランダムネス基準を導いた．2）Lynch-Davisson ユニバーサル符号化を用い，ゲーム論的大数の法則の別証明を与えると同時に，一般の予測ゲームに対し，大数の法則や意見収斂定理を拡張できる可能性を見いだした．

研究成果の概要（英文）：We explored an information theoretic study of empirical probability. The main results are summarized as follows: 1) A novel Martin-Loef randomness criterion for two distinct computable probability measures was obtained based on finite-type quasi-symmetric divergence functions. 2) An alternative proof of a game-theoretic law of large numbers was given based on the Lynch-Davisson universal coding algorithm, and a possibility of generalizing the law of large numbers and the theorem of convergence of opinions to a general prediction game was pointed out.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,000,000	0	1,000,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
2012年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	2,700,000	510,000	3,210,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：統計数学，経験確率，情報理論，ユニバーサル符号化，ランダムネス

1. 研究開始当初の背景

17世紀の Pascal と Fermat の往復書簡に始まるとされる確率論は，300年以上の時を経て，Kolmogorov 流の測度論的確率論へと整備されてきた．しかし，与えられたシステムにどのような確率空間を付随させればよいのかという最も基本的な問題にすら，従来の理論体系は明確に答える術を有していない．これに対し Shafer と Vovk は近年，

ゲーム論的枠組みを用いた経験確率の体系化を精力的に推し進めている．これは Ville のマーチンゲール理論と Dawid の確率的逐次予報 (prequential) システム理論とを合体・精密化した数学理論であるが，確率空間をアприオリに仮定しないという意味で確率の哲学的基礎づけとも関連した極めて野心的な試みである．特に，確率空間を全く用いることなく，対数の法則，重複対数の法則，

中心極限定理などを導出し、従来の確率論的枠組みに比べ、ゲーム論的枠組みがいかに単純で柔軟な構造を有しているかを強調している。彼らは以上の成果を「Probability and Finance: It's Only a Game!」という著書にまとめている。その後 Vovk は、Blackwell and Dubins による「意見収斂」定理と、彼自身および研究代表者による「Martin-Loef ランダム系列の同値類の特徴づけ」理論を結びつけ、経験確率に対する絶対連続性の概念を提唱した。現在、Dawid, Vovk, そして研究代表者らによる共同研究の中で、経験確率の理論のさらなる深化を模索している。

2. 研究の目的

von Mises の先駆的な研究に始まるランダムネスの理論が、「確率とは何か」という問いかけと不可分な関係にあることは良く知られている。しかしながら従来のランダムネス理論は、(主として計算可能な) 確率空間を前提とし、その上に構築されたものであって、確率概念そのものを規定しようという方向性は有していなかった。これに対し Dawid や Vovk らの着想は、prequential システム (あるいはゲーム論的枠組み) を介して、有限の立場から経験確率を捉えようとするものであり、計算可能性の問題は自然に回避される。本研究の目的は、Dawid や Vovk らの着想をさらに大胆に推し進め、より普遍的かつ汎用的な情報理論の観点から、確率空間をアприオリに仮定しない経験確率の理論を構築することにある。

3. 研究の方法

基本的には研究代表者が単独で純理論的に研究を推進する。また、これと並行して、必要に応じて国内外の共同研究者と定期的にディスカッションを行う。さらに適宜、研究集会を企画し、他の研究者とのブレインストーミングを活発に行う。こうして研究者間の情報交換を密に図ることにより、研究の行き詰まりを可能な限り回避すると共に、必要ならば研究内容や研究方向を柔軟に軌道修正しながら研究を遂行していく。

4. 研究成果

(1) Vovk は Blackwell-Dubins による意見収斂定理と Martin-Loef ランダム系列の同値類の特徴づけ (ランダムネス基準) 理論とを結びつけ、経験確率における絶対連続性の概念を提唱した。本研究ではこの概念のさらなる深化を目指し、計算可能性理論の範囲でランダムネス基準の一般化を研究した。情報理論において2つの確率測度の違いを測る量に f -divergence がある。ここに f は $(0, \infty)$ 上で定義された $x=1$ で狭義凸な凸関数である。この性質を有する関数 $f(x)$ を以下では

divergence 関数と呼び、その転置関数を $f^*(x)$ と書くことにする。本研究では、2つの計算可能な確率測度に関して同時に (Martin-Loef の意味で) ランダムとなる無限列の f -divergence によるランダムネス基準の研究を行った。情報幾何学で標準的に用いられる α 関数族を divergence 関数に用いた α -divergence に関する Vovk および研究代表者による先行研究を念頭に、当初は「有限型の divergence 関数、すなわち $f(0)$ も $f^*(0)$ も共に有限値となる divergence 関数はランダムネス基準を与える」という予想を立てていたが、研究を進める中で、実は『有限型』という条件だけでは弱すぎる事が明らかとなった。様々な試行錯誤の末、『準対称』という条件を見いだした。これは $x \rightarrow 1$ での $f^*(x)/f(x)$ の下極限が正であることとして定義される。下図は準対称性を満たさない divergence 関数の例である。

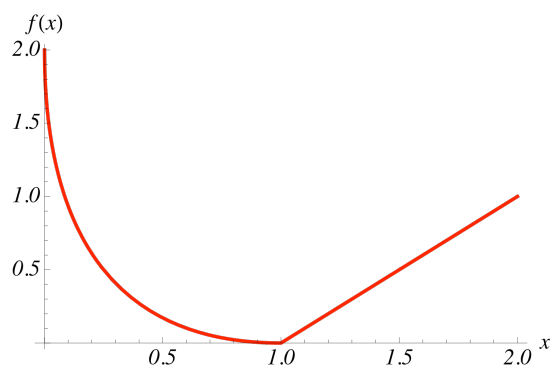


図1 準対称でない divergence 関数の例

そしてこの概念を用いることにより、「有限型で準対称な divergence 関数はランダムネス基準を与える」という定理を証明することができた。 α 関数族はすべて有限型かつ準対称であるので、上記定理は Vovk および研究代表者の先行結果を本質的に拡張するものである。なお、準対称性の要請は強すぎる可能性も残っているが、同条件を外せるのかどうかについては未解決である。実際、上記定理を導く際の鍵となる補題において、divergence 関数に対する何らかの条件が必要であることは明らかとなったが、これが準対称というクラスに一致するかどうかについては、今のところ解決への糸口が見つかっていないので、今後の研究でこの点を明らかにしたい。

(2) 具体的なユニバーサル符号がどの程度のランダムネス識別能力があるかを検討するため、Shafer-Vovk による経験確率の研究の出発点となった「ゲーム論的大数の法則」の情報理論的研究を行った。Shafer-Vovk は、

ϵ 戦略と呼ばれる投資戦略を可算無限個用いる混合戦略を用いて大数の強法則を証明した。これはアルゴリズムがシンプルで汎用性が高い反面、証明のための戦略という側面が強く、実際のゲームにおける賭け戦略としては用いることができないという難点があった。これに対し Kumon-Takemura-Takeuchi は、i. i. d. 過程の場合に限られる論法ではあるが、混合戦略を用いずとも単一の Bayes 戦略で大数の強法則が証明できることを明らかにした。これは Beta 分布を事前分布として、未知の確率分布の i. i. d. 拡張分布を混合して作った投資戦略であり、実際のゲームに適用できるという利点を持つが、その情報理論的意味は不明であった。本研究では、具体的なユニバーサル符号として Lynch-Davisson ユニバーサル符号化を用いて投資戦略を構成し、その漸近解析を行うことにより、ゲーム論的大数の法則のさらなる別証明を与えると共に、その投資戦略が、Kumon らの Bayes 戦略のある極限となっていることを明らかにした。

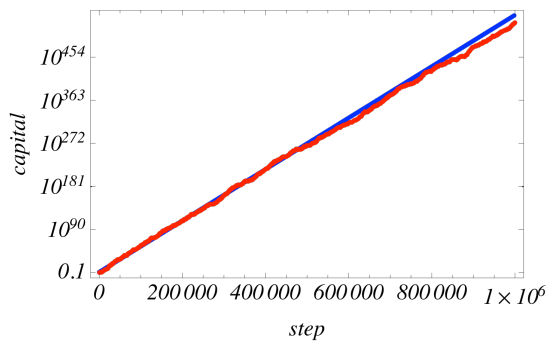


図2 Lynch-Davisson 戦略の数値実験(1)

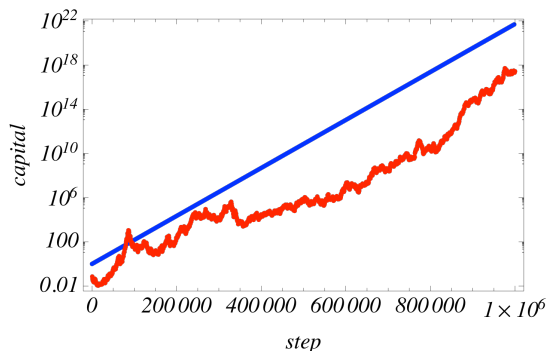


図3 Lynch-Davisson 戦略の数値実験(2)

図2は i. i. d. 確率過程から出力されるデータに対して Lynch-Davisson 投資戦略を用いた場合の資産過程のシミュレーション例である。青の直線は理論的に予想される平均挙動を表す。シミュレーションと理論値が良く一致していることが分かる。一方、図3は、

非定常確率過程から出力されるデータに対して Lynch-Davisson 投資戦略を用いた場合の資産過程のシミュレーション例である。確率過程の非定常性によりシミュレーションと理論値とでトラジェクトリ自体には食い違いが生じているが、漸近的な増加率は近いことが分かる。

(3) 以上の研究を通じ、実は資産過程が尤度比過程として一般に書けること、言い換えればゲーム論的ランダムネスとは、予測ゲームの枠組みにマーチンゲール収束定理を埋め込んだものに他ならないことが分かった。このような視点に立つと、資産過程の対数は対数損失関数ゲームにおけるリスク関数の差に一致するので、問題を一般化して、任意の損失関数を用いたゲームにおける大数の法則や意見の収斂といった問題を議論できるようになる。しかもこれは Wald が提唱した統計的決定理論の一般的な枠組みとの整合性も良く、Dawid が導入した決定幾何学という枠組みにも直結するため、微分幾何学的手法を用いて経験確率を研究するという、本研究開始当初には予想だにしなかった研究の方向性が見えてきた。今後、この方向性の研究をさらに推進していく。

(4) ゲーム論的ランダムネス理論の応用として現在、区分線形力学系が生成するデータのみを見て背後にある力学系を推定するという問題にも着手している。予備的な数値実験により、例えばロジスティック写像が生成するデータ系列が Bernoulli 過程と同型か否かという判定問題において、パラメタの変化に非常に鋭敏なテストを構成できることが明らかになっているが、まだ具体的な研究成果は得られていないので、今後も研究を継続していく。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[学会発表] (計3件)

- ① 藤原彰夫, Convex games, randomness, and geometry, 研究集会「エルゴード理論, 情報理論, 計算機科学とその周辺」, 2013. 3. 14, 大阪大学.
- ② 藤原彰夫, Randomness criteria in terms of f-divergences, 研究集会「エルゴード理論, 情報理論, 計算機科学とその周辺」, 2011. 3. 5, 統計数理研究所.
- ③ Akio Fujiwara, Randomness criteria in terms of f-divergences, Third workshop on game theoretic probability and

related topics, 2010.6.23, Royal
Holloway, University of London.

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~fujiwara>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤原彰夫 (FUJIWARA AKIO)

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：30251359

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし