

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年3月31日現在

機関番号：17102  
 研究種目：挑戦的萌芽研究  
 研究期間：2010～2011  
 課題番号：22654018  
 研究課題名 汎関数積分による場の量子論のスペクトル解析

研究課題名 Spectral analysis of quantum field theory by means of functional integrations

研究代表者  
 廣島 文生 (HIROSHIMA FUMIO)  
 九州大学・数理学研究院・准教授  
 研究者番号：00330358

研究成果の概要（和文）：

研究成果の概要を研究計画調書に示した研究目的(I)(II)(III)に沿って述べる。

(I) 相対論的 PF 模型の研究は, PF 模型の生成する熱半群を 3つの確率過程, ユークリッド場, ブラウン運動, subordinator を用いて汎関数積分表示することができた. これからハミルトニアンの本質的自己共役性, 固有関数の減衰性の評価, 基底状態の一意性を示すことができた.

(II) 相対論的ネルソン模型の enhanced binding を示すことができた. ここでも汎関数積分表示が非常に威力を発揮した. 佐々木格氏(信州大・助教)と共著で論文にまとめ現在国際誌に投稿中である.

(III) 擬リーマン多様体上に定義されたネルソン模型の基底状態の解析を行った. C. Gerard(パリ第 11 大), 廣島, 鈴木(信州大), A. Panati (トゥーロン大)の共著で国際誌に論文を出版した.

研究成果の概要（英文）：

According to purpose (I), (II) and (III) proposed in KENKYU-KEIKAKU-CHOSHOU, we review results obtained by Grant-in-Aid for Challenging Exploratory Research.

(I) The functional integral representation of the heat semi-group generated by the relativistic PF model is constructed in terms of three stochastic processes, Euclidean field, Brownian motion and subordinator. By using this we show the essential self-adjointness of PF model, decay of bound states and the uniqueness of ground state.

(II) Enhanced binding of the many-body relativistic Nelson model is shown with Itaru Sasaki (Shinshu university). A functional integral representation is a key ingredient. The result was sent to an international journal for publication.

(III) The Nelson model defined on a pseudo Riemannian manifold is studied with C. Gerard (Paris XI), Akito Suzuki (Shinshu university) and Annalisa Panati (Toulon-Var). We published papers in international journals.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	900000	0	900000
2011年度	800000	240000	1040000
年度			
年度			
年度			
総計	1700000	240000	1940000

研究分野：数理系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数解析

### 1. 研究開始当初の背景

PF ハミルトニアン及びそれに関連するハミルトニアンのスペクトルを純粋数学の立場から非摂動的に解析する手法が数多く開発されてきた。例をあげれば、くりこみ群を使う方法、関数解析的な手法、そして汎関数積分を利用する方法などである。非摂動的な手法が必要である理由は、研究対象が抽象的には連続スペクトルに埋め込まれ点スペクトルの解析であるためである。研究開始当初は非相対論的なモデルの解析が収束に向かい、相対論的なモデルの解析に話題の中心が移りつつあった。そこで、相対論的な PF モデル、相対論的なネルソンモデルおよび擬リーマン多様体上に定義されたモデルの解析を研究課題に挙げた。もちろんこれらの解析は非相対論的なものの単純な応用では上手くいかない。

### 2. 研究の目的

(I)PF モデルは量子電磁力学を単純化したモデルである。PF モデルのスペクトルは最近 15 年間で非常に解析が進んだ。そこでその相対論的な場合のスペクトル解析をおこなう。

(II) 多体ネルソンモデルの enhanced binding はすでに F. Hiroshima and I. Sasaki, *Math. Z.* 259 (2008) で示されている。これを相対論的な場合に拡張する。

(III)標準的なネルソンモデルは3+1次元のミンコフスキー空間上に定義されるが、これを一般化して4次元の擬リーマン多様体上に定義して基底状態の存在・非存在と多様体の関係を調べる。

### 3. 研究の方法

2. 研究目的(I)(II)(III)について各々研究の方法を述べる。

(I)はじめに相対論的 PF ハミルトニアンが作る熱半群を汎関数積分表示する。表示できれば基底状態の一意性が F. Hiroshima, *JMP* (2000)の結果から示せる。さらにこの積分表示を用いて、熱半群の不変部分空間を探す。一般論からこの不変部分空間上で相対論的 PF ハミルトニアンの本質的自己共役性を示すことができる。この結果は結合定数、紫外切断のパラメーターに全くよらない。次にこの汎関数積分表示と基底状態から、ある種のヒルベルト空間値確率過程をつくり、それが

マルチンゲールだということを示す。この事実から基底状態の空間減衰性の上からの評価を得る。最後に並行移動不変なモデルに対しても上記と同様なこと F. Hiroshima, *JFA* (2007)を利用して示す。

(II)多体の相対論的ネルソンモデルに対して局所化の方法を利用して、いわゆる stability 条件が場の質量が  $m>0$  のときの基底状態の存在のための分条件であることを示す。次に汎関数積分表示を用いて  $m$  に一様にこの基底状態が指数減衰することを示し  $m=0$  での基底状態の存在も示す。

(III)4次元の擬リーマン多様体上に定義したネルソンモデルはミンコフスキー空間上のモデルにユニタリー変換できる。このとき場の質量が変数質量に変わる。

⑦変数質量の減衰が遅い時、擬微分作用素の技術を利用して基底状態の存在を示す。

⑧変数質量の減衰が早い時、汎関数積分表示を利用して基底状態の非存在を示す。

### 4. 研究成果

研究目的(I)(II)(III)にそって述べる。

(I) 研究計画通りの進展をみた。汎関数積分表示に現れるヒルベルト空間値確率積分の極限が重要な役割を果たすことに気付いた。論文としてまとめ現在①として執筆中。

(II) 指数減衰性の証明で汎関数積分表示が威力を発揮し、佐々木格氏と共著で②にまとめ、現在国際誌に投稿中。

(III) 基底状態の存在・非存在ともに示すことができた。C. Gerard, A. Panati, A. Suzuki と共著で論文として出版した。

(その他の研究成果) (I)(II)(III)の研究を行う中で、次のような結果を得ることができた。

⑦ネルソンモデルの基底状態のボゾンの個数のモーメント期待値の経路積分表示と評価。③にまとめた。

⑧準相対論的で磁場とスピンをもったシュレディンガー作用素の作る熱半群の経路積分表示と固有関数の減衰性の評価。④にまとめた。

⑦Lieb-Thirring bound の一般形を得た。⑤にまとめた。

⑧擬リーマン多様体上定義されたネルソン

模型の紫外切断を外した。⑥, ⑦にまとめた。

プレプリント

- ① F. Hiroshima, Relativistic Pauli-Fierz model by path measures, 2012.
- ② F. Hiroshima and I. Sasaki, Enhanced binding of an N particle system interacting with a scalar field II, relativistic version, 2012.
- ③ F. Hiroshima, T. Ichinose and J. Lorinczi, Probabilistic representation and fall-off of bound state of relativistic Schrodinger operators with spin 1/2, 2012.
- ④ F. Hiroshima, J. Lroinczi and T. Takaesu, A probabilistic representation of the ground state expectation of fractional powers of the boson number operator, 2012.
- ⑤ F. Hiroshima and J. Lorinczi, Lieb-Thirring type bound for Schrodinger operators with Bernstein functions of the Laplacian, 2012.
- ⑥ C. Gerard, F. Hiroshima, A. Panati and A. Suzuki, Removal of the UV cutoff for the Nelson Hamiltonian with variable coefficients, 2012.
- ⑦ M. Gubinelli, F. Hiroshima and J. Lorinczi, Ultraviolet renormalization of the Nelson Hamiltonian through functional integration, 2012.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- ① C. Gerard, F. Hiroshima, A. Panati and A. Suzuki, Absence of ground state of the Nelson model with variable coefficients, J. Funct. Anal. 262 (2012), 273-299. 査読有.
- ② C. Gerard, F. Hiroshima, A. Panati and A. Suzuki, Infrared problem for the Nelson model with variable coefficients Commun. Math. Phys. 308 (2011), 543-566. 査読有.
- ③ F. Hiroshima, I. Sasaki, H. Spohn and A. Suzuki, Enhanced binding in quantum field theory, COE Lecture Note 38, 2012, 206 ページ, 査読なし.
- ④ F. Hiroshima, The Nelson model on a static Lorentzian manifold, RIMS 講究録掲載予定 2012. 査読なし.
- ⑤ C. Gerard, F. Hiroshima, A. Panati and A. Suzuki, Existence and absence of ground states for a particle interacting through the quantized scalar field on a static pacetime, RIMS Kokyuroku Bessatsu B21 (2010), 15-24. 査読有.
- ⑥ F. Hiroshima and I. Sasaki, On the

ionization energy of semi-relativistic Pauli-Fierz model for a single particle, RIMS Kokyuroku Bessatsu B21 (2010), 25-34. 査読有.

- ⑦ F. Hiroshima, Relativistic Pauli-Fierz model, COE Lecture Note 30, (2011), 145-161. 査読なし.
- ⑧ T. Hidaka and F. Hiroshima, Pauli-Fierz model with Kat-class potentials and exponential decays, Rev. Math. Phys. 22 (2010) 1181-1208. 査読有

[学会発表] (計 5 件)

- ① F. Hiroshima, Mathematical UV cutoff renormalization of a scalar quantum field model, 「物理と情報の階層構造」京大基研 2012 年 1 月 5 日.
- ② F. Hiroshima, Spectrum of scalar quantum field model on a Lorentzian manifold, 「くりこみ群の数理科学への応用」RIMS, 2011 年 9 月 12-14 日.
- ③ F. Hiroshima, Ground state of scalar quantum field on pseudo Riemannian manifolds, 「Scattering theory an international workshop」東大, 2011 年 6 月 21 日.
- ④ F. Hiroshima, Feynman-Kac type formula with cadlag path and generalized Schrodinger operator with spin, 「量子科学における双対性とスケール」京大基研, 2010 年 11 月 4 日.
- ⑤ F. Hiroshima, Spectral analysis of QFT by functional integration with jump processes, Stochastic Process and their Applications 2010, 大阪, 2010 年 9 月 10 日.

[図書] (計 1 件)

V. Betz, F. Hiroshima and J. Lorinczi, Feynman - Kac - Type Theorems and Gibbs Measures on Path Space. With Applications into Rigorous Quantum Field Theory, **Studies in Mathematics 34**, Walter de Gruyter, 2011, 503 pages.

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :  
国内外の別 :

○取得状況（計0件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等 なし

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

廣島 文生 (HIROSHIMA FUMIO)  
九州大学・大学院数理学研究院・准教授  
研究者番号：00330358

##### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

##### (3) 連携研究者

佐々木格 (SASAKI ITARU)  
信州大学・総合工学系研究科・助教  
研究者番号：50558161