

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月21日現在

機関番号：12102

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2010～2011

課題番号：22740002

研究課題名（和文） 準フロベニウス多元環上の2項傾斜鎖複体の研究

研究課題名（英文） Two-term tilting complexes for selfinjective algebras

研究代表者

阿部 弘樹 (ABE HIROKI)

筑波大学・数理物質系・研究員

研究者番号：20533342

研究成果の概要（和文）：(1) 準フロベニウス多元環上において、ブレンナー・バトラー傾斜操作の拡張となる2項傾斜鎖複体を構成した。またブラウアー・ツリーに対して、その2項傾斜鎖複体が与える変形操作を決定し、その変形によって全ての導来同値類が得られることを示した。(2) アルティン多元環上の任意の2項傾斜鎖複体に対して、そのホモロジー群が剰余多元環上の傾斜加群になることを示し、その傾斜加群の準同型環を決定した。またこの結果を多元環の表現論における一連の計算手法の中に位置づけ、新たな導来同値多元環の計算手法を提示した。

研究成果の概要（英文）：(1) We introduce the notation of reflections for selfinjective algebras and determine the transformations of Brauer trees associated with reflections. In particular, we provide a way to transform every Brauer tree into a Brauer line. (2) We show that every two-term tilting complex over an Artin algebra has a tilting module over a certain factor algebra as a homology group. Also, we determine the endomorphism algebra of such a homology group, which is given as a certain factor algebra of the endomorphism algebra of the two-term tilting complex. Thus, every derived equivalence between Artin algebras given by a two-term tilting complex induces a derived equivalence between the corresponding factor algebras.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,900,000	570,000	2,470,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学、代数学

キーワード：環論、多元環の表現論

1. 研究開始当初の背景

多元環の表現論において傾斜理論が

アウスランダー・ライテン理論と並んで最も重要な理論となった背景には、ひと

つの卓越したアイデアがあった。傾斜理論では、既知の多元環 A に傾斜操作を施し、新たな多元環 B を構成する。このとき多元環 B には多元環 A の性質が多く遺伝するため、 A において既知であった性質を手がかりとして、 B の解析が可能となる。この傾斜操作による解析法は、多元環の表現論における大きな方針転換を意味する。即ち、未知の多元環を解析しようとするそれまでの発想を逆転し、性質のわかる多元環をつくり出す手法に舵を切ったのである。こうして傾斜理論は、既知の多元環を手掛かりとして、より広範な多元環のクラスの解析に成功した。

傾斜操作の一連の手続きはこうだ。多元環 A 上の加群圏において傾斜加群 T を構成し、その準同型環 $\text{End}(T)$ を新たな多元環 B とすればよい。よって傾斜理論における興味の主対象は傾斜加群の構成法に他ならない。ところが、準フロベニウス多元環上の加群圏において傾斜加群を構成しようとする、それは自明なものに限られてしまい意味をなさない。そのため準フロベニウス多元環は傾斜理論から取り残されたのであった。そこで傾斜操作を加群圏における手続きから導来加群圏における手続きへと拡張する試みがなされる。ここに至って傾斜操作は、多元環 A 上の導来加群圏において傾斜鎖複体 T を構成し、その準同型環 $\text{End}(T)$ を新たな多元環 B とする手続きに拡張された。傾斜鎖複体は準フロベニウス多元環 Λ 上の導来加群圏において非自明であり、その準同型環 Γ には Λ の性質が多く遺伝する。こうして準フロベニウス多元環の傾斜理論が誕生する。

本研究は準フロベニウス多元環の傾斜理論の一理論に位置付けられ、準フロベニウス多元環上の傾斜鎖複体に対するより深い理解を目指して開始された。

2. 研究の目的

本研究の研究代表者は、2005年有限表現型準フロベニウス多元環上の傾斜鎖複体は本質的に2項傾斜鎖複体(項数2の傾斜鎖複体)によって与えられることを指摘した。即ち、次が成り立つ。

定理

有限表現型準フロベニウス多元環 Λ 上の任意の傾斜鎖複体 T の準同型環 $\Gamma = \text{End}(T)$ に対して、 Γ が準フロベニウス多元環であるならば、有限表現型準フロベニウス多元環の列

$$\Lambda = \Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m = \Gamma$$

が存在して、各 $i = 0, 1, \dots, m-1$ で Γ_{i+1} は Γ_i 上の2項傾斜鎖複体の準同型環である。

この結果より、有限表現型準フロベニウス多元環の傾斜理論は、2項傾斜鎖複体による傾斜操作のみを考察の対象とすれば十分であることが保証される。本研究では上記の定理を根拠として、準フロベニウス多元環上の2項傾斜鎖複体を主たる研究対象とし、その構成法の探求、およびホモロジー代数的性質の解析を目的とする。

3. 研究の方法

2項傾斜鎖複体 T は

$$T : \dots \rightarrow 0 \rightarrow T_{-1} \xrightarrow{f} T_0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

という構造をしており、その性質は準同型写像 $f : T_{-1} \rightarrow T_0$ によって定まると言ってもよい。本研究では、準同型写

像 f のホモロジー代数的性質と 2 項傾斜鎖複体 T のホモロジー代数的性質の対応に着目する。準同型写像 f のホモロジー代数的性質は加群圏において決定する。これに対して、2 項傾斜鎖複体 T のホモロジー代数的性質は導来加群圏において決定する。この間の対応から 2 項傾斜鎖複体を定める準同型写像の特徴的な性質を抽出することによって、新しい準同型写像のクラスを探求する。

4. 研究成果

(1) 古典的な傾斜理論において、ブレンナー・バトラーが導入した傾斜操作を拡張することで、準フロベニウス多元環上の 2 項傾斜鎖複体を構成した。この 2 項傾斜鎖複体が定める傾斜操作の長所は、具体的に変形を記述することが可能な点にある。特に、クワイバーから定まる準フロベニウス多元環の変形は、直既約射影加群の組成列から記述可能であり、その応用例として、例外点を持たないブラウアー・ツリーの変形を完全に決定した。さらに、その変形によって例外点を持たないブラウアー・ツリーの全てのクラスが構成可能であることを示した。

(2) 準フロベニウス多元環は、特にアルティン多元環である。アルティン多元環上の 2 項傾斜鎖複体に関しては、2002 年星野・加藤・宮地による 2 項傾斜鎖複体が定める安定ねじれ対に関する研究結果が適用可能であった。本研究では、星野・加藤・宮地の研究結果を整理・発展させることにより、2 項傾斜鎖複体のホモロジー群が適当な加群圏において傾斜加群あるいは

余傾斜加群になることを突き止めた。即ち、次が成り立つ。

定理

アルティン多元環 A 上の任意の 2 項傾斜鎖複体 T の 0 次ホモロジー群 $H_0(T)$ に対して、 $H_0(T)$ の零化イデアル a による剰余環 A/a を取れば、 $H_0(T)$ は A/a 上の傾斜加群になる。双対的に、 T の (-1) 次ホモロジー群 $H_{-1}(T)$ に対して、 $H_{-1}(T)$ の零化イデアル a' による剰余環 A/a' を取れば、 $H_{-1}(T)$ は A/a' 上の余傾斜加群になる。

こうして新たな傾斜加群が得られたので、その準同型環がどのような多元環になるのかを問う必要性が生じる。その問いに対する完全な解答が次の定理である。上記定理と同じ記号の下で、次が成り立つ。

定理

アルティン多元環 A 上の任意の 2 項傾斜鎖複体 T に対して、 $B = \text{End}(T)$ と置く。このとき A/a 上の傾斜加群 $H_0(T)$ の準同型環は、 $H_0(T)$ を左 B -加群と見たときの零化イデアル b による剰余環 B/b と同型である。双対的に、 $H_{-1}(T)$ の準同型環は、 $H_{-1}(T)$ を左 B -加群と見たときの零化イデアル b' による剰余環 B/b' と同型である。

これらの結果より、アルティン多元環 A 上の 2 項傾斜鎖複体が定める傾斜操作によってアルティン多元環 B が構成されたとき、剰余環 A/a 上の傾斜操作が常に誘導され、その傾斜操作によって B/b が得られることが判明した。また視点を換え、2 項傾斜鎖複体を定める準同型写像に着目すると、これらの結果は 2 項傾

斜鎖複体を定める準同型写像がその余核に傾斜加群、その核に余傾斜加群を持つような準同型写像のクラスに属することを主張している。

2012年伊山によって創始された τ 傾斜理論の立場から本研究を省みると、 A/a 上の傾斜加群 $H_0(T)$ は A 上のサポート τ 傾斜加群として理解することができる。このことより $H_0(T)$ はクラスター傾斜対象と一対一に対応し、 $H_0(T)$ は傾斜理論、クラスター傾斜理論、 τ 傾斜理論に股がる重要な対象であることが理解される。 τ 傾斜理論は誕生から間もなく、今後の発展が期待される理論である。本研究はその萌芽研究として位置付けることができ、傾斜理論において重要な一歩を与えたと言ってよい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

- ① Hiroki Abe, Tilting modules arising from two-term tilting complexes, Communications in Algebra, 査読有, 掲載確定.
- ② Hiroki Abe, Reflection for selfinjective algebras, Proceeding of the 43th Symposium on Ring Theory and Representaion Theory, 査読無, 2010, 1-4.

[学会発表] (計4件)

- ① 阿部弘樹, Tilting modules arising from tilting modules, 第44回環論および表現論シンポジウム, 2011年9月25日, 岡山大学.
- ② 阿部弘樹, On restricted Auslander algebras, 第56回代数学シンポジウム, 2011年8月9日, 岡山大学.
- ③ 阿部弘樹, Reflection for selfinjective algebras, 日本数学会秋季総合分科会, 2010年9月22日, 名古屋大学.
- ④ 阿部弘樹, Reflection for selfinjective algebras, 第43環論および表現論シンポジウム, 2010年9月11日, 鳴門教育大

学.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

阿部 弘樹 (ABE HIROKI)

筑波大学・数理物質系・研究員

研究者番号: 20533342