

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年5月2日現在

機関番号：17701

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2012

課題番号：22740005

研究課題名（和文）ホモロジカルな圏論の代数幾何学・表現論への応用

研究課題名（英文）Applications of homological category theory to algebraic geometry and representation theory

研究代表者 中岡 宏行 (HIROYUKI NAKAOKA)

鹿児島大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：90568677

研究成果の概要（和文）：

(I) 三角圏上のホモロジカルな構造

三角圏上のねじれ対は、古典的に良く知られ代数幾何学においても重要な概念である「 t -構造」と、近年代数の表現論において定式化された「クラスター傾部分圏」を同時に一般化する概念である。本研究ではねじれ対に関する代数構造を調べており、 t -構造のハートとクラスター傾部分圏による剰余を一般化する形で、ねじれ対からのアーベル圏の構成を行った。

(II) 有限群に付随する両変関手

有限群に付随する両変性を持つ関手「Mackey 関手」と、Mackey 関手論における可換環論的役割を果たす「丹原関手」について圏論的視点からの研究を行っている。可換環論の両変版として、イデアル剰余・分数環・多項式環・素スペクトラムに相当する基本的操作を丹原関手に対して定式化した。

研究成果の概要（英文）：

(I) Homological structures on triangulated categories:

Torsion pair on a triangulated category generalizes simultaneously ‘ t -structure’, a well-known classical notion which is also important in algebraic geometry, and ‘cluster tilting subcategory’, which is formulated recently in representation theory of algebras. While investigating algebraic structures on torsion pairs, we have given a construction which associates an abelian category to each torsion pair, which generalizes the heart of a t -structure and the cluster tilting quotient.

(II) Bivariant functors associated to finite groups:

We are investigating ‘Mackey functor’ - a functor bivariant on a finite group, and especially ‘Tambara functor’, which plays a role of commutative ring in Mackey functor theory, from a categorical point of view. As a bivariant analog of commutative ring theory, we have formulated fundamental operations on Tambara functors, corresponding to ideal quotient, fraction, polynomial and prime spectrum.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
2012年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：三角圏、Mackey 関手、アーベル圏、丹原関手

1. 研究開始当初の背景

圏と関手は比較的新しい数学の概念であるが、対象の本質をとらえ全体像を把握するために極めて有用な概念である。特に代数幾何学や表現論などを初めとし、代数緒分野では圏論は欠かせない道具として多用されている。このため本研究では、圏論を用い代数緒分野におけるホモロジカルな現象の定式化および一般論の構築を目指す。以下、

(I) 三角圏上のホモロジカルな構造

(II) 有限群に付随する両変関手

の二つのテーマに分けて述べる。

(I) 三角圏は Grothendieck, Verdier により導入されて以降、アーベル圏と並びホモロジー代数の舞台として広く認識されている。代数幾何学や表現論などで多用される導来圏・安定圏に加え、近年では軌道圏として構成されるクラスター圏など、その応用範囲を拡大しつつある。

Beilinson, Bernstein, Deligne により示された結果として、 t -構造のハートとしてアーベル圏が得られることが知られている。一方近年、代数の表現論においてクラスター代数の圏化としてクラスター圏が定義され、そのクラスター傾対象によるイデアル剰余が加群圏に同値となることが示された (Buan, Marsh, Reineke, Reiten, Todorov), (Keller, Reiten)。この事実は Koenig と Zhu により一般の三角圏において、クラスター傾部分圏による剰余でアーベル圏を得る構成に再定式化されている。これら新旧の「 t -構造のハート」および「クラスター傾剰余」はいずれも、三角圏上のホモロジカルな構造からアーベル圏を得る構成法を与えるものである。

(II) 有限群 G 上の Mackey 関手とは、有限 G -集合上の共変性と反変性をともに有する「両変」関手のことをいい、群のコホモロジー・表現環・不変部分環・Burnside 環やその亜種などを例にもつ。もともとは有限群の表現論で考案されたものだが、これを群 G 上の G -両変理論におけるアーベル群のアナロジーとみなすことができる。この文脈のもと、可換環の G -両変版は丹原関手であると考えられる。

丹原関手とは、加法と乗法に相当する Mackey 関手のペアであり、Burnside 環を含む上記四つの例は全て丹原関手の構造を持つ (Tambara)。本研究は、「可換環論の G -両変版」としての丹原関手の一般論の構築を目的としている。

2. 研究の目的

圏論を主な手法とし、代数的な問題を扱うホモロジカルな枠組みの構築を目指している。代数緒分野に現れる問題に対し、三角圏・アーベル圏・モノイダル圏等の概念を用いたアプローチを試みることを目的とする。

3. 研究の方法

(I) 三角圏上定義されるホモロジカルな対象の性質を一般的に論じ、それに付随する代数構造を明らかにする。

(II) 丹原関手を可換環の G -両変版とみなし、可換環論の類似を丹原関手に対しても展開する。

4. 研究成果

(I) 三角圏上で古典的に良く知られ代数幾何学でも用いられる重要な概念である「 t -構造」と、近年代数の表現論に現れ定式化された「クラスター傾部分圏」を同時に一般化する対象である「ねじれ対」に付随する代数構造を調べた。

論文④, ⑥では t -構造のハートとクラスター傾部分圏による剰余を一般化する形で、ねじれ対からのアーベル圏の構成を行った。

さらにその後 Buan と Marsh により、クラスター傾対象による剰余に代わり、rigid 対象による剰余で整半アーベル圏を得る方法が提示されたため、これを受け、論文②ではねじれ対のペアを用いることで Buan と Marsh の剰余圏も実現できることを示した。

(II) 丹原関手論を有限群上の両変関手の可換環論と位置付け、可換環論における基本的操作を丹原関手の枠組みで可能にした。論文⑦, ⑤, ③ではそれぞれ、半群環・分数量環・イデアル剰余に相当する操作を丹原関手に対して可能とした。論文①では多項式環の類似を与え、それが Mackey 関手・丹原関手ではよく知られた「Dress 構成」の一般化を与えることを示した。

さらに論文⑦では Witt-Burnside 構成との関係についても論じている。Witt-Burnside 環は Dress と Siebeneicher により定義された、Witt 環及び Burnside 環の同時拡張概念である。 G が有限の場合に Witt-Burnside 環が丹原関手の構造をもつことが Brun により示されたため、これを受け、論文⑦では R が特殊な場合に、Witt-Burnside 構成を半群環の G -両変版を用いて記述している。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 8 件)

① Hiroyuki Nakaoka, A generalization of the Dress construction for a Tambara functor, and its relation to polynomial Tambara functors, *Advances in Mathematics*, Vol. 235, pp. 237-260 (2013) 査読有.

② Hiroyuki Nakaoka, General heart construction for twin torsion pairs on triangulated categories, *Journal of Algebra*, Vol. 374, pp. 195-215 (2013) 査読有.

③ Hiroyuki Nakaoka, Ideals of Tambara functors, *Advances in Mathematics*, Vol. 230, No. 4-6, pp. 2295-2331 (2012) 査読有.

④ Hiroyuki Nakaoka, Noriyuki Abe, General Heart Construction on a Triangulated Category (II): Associated Homological Functor, *Applied Categorical Structures*, Vol. 20, No. 2, pp. 161-174 (2012) 査読有.

⑤ Hiroyuki Nakaoka, On the fractions of semi-Mackey and Tambara functors, *Journal of Algebra*, Vol. 352, No. 1, pp. 79-103 (2012) 査読有.

⑥ Hiroyuki Nakaoka, General Heart Construction on a Triangulated Category (I): Unifying t-Structures and Cluster Tilting Subcategories, *Applied Categorical Structures*, Vol. 19, No. 6, pp. 879-899 (2011) 査読有.

⑦ Hiroyuki Nakaoka, Tambarization of a Mackey functor and its application to the Witt-Burnside construction, *Advances in Mathematics*, Vol. 227, No. 5, pp. 2107-2143 (2011) 査読有.

⑧ Hiroyuki Nakaoka, Comparison of the definitions of abelian 2-categories, *Tsukuba Journal of Mathematics*, Vol. 34, No. 2, pp. 173-182 (2010) 査読有.

[学会発表] (計 17 件)

① Hiroyuki Nakaoka, Spectrum of the Burnside Tambara functor on a cyclic \mathbb{F}_p -group, *Kindai group theory seminar*, 2013 年 1 月 11 日, 近畿大学.

② Hiroyuki Nakaoka, On torsion pairs on triangulated categories, *代数学シンポジ*

ウム, 2012 年 8 月 21 日, 京都大学.

③ Hiroyuki Nakaoka, Construction of a (pre-)abelian category from a pair of torsion pairs on a triangulated category (※ parallel session), *International conference on Representations of Algebras 2012*, 2012 年 8 月 14 日, Bielefeld 大学 (Bielefeld, ドイツ).

④ Hiroyuki Nakaoka, Some algebraic operations on Tambara functors on finite groups, *有限群とその表現、頂点作用素代数、組合せ論の研究*, 2012 年 3 月 6 日, 京都大学.

⑤ Hiroyuki Nakaoka, Some homological constructions on triangulated categories, *代数幾何ワークショップ*, 2011 年 12 月 7 日, 東京工業大学.

⑥ Hiroyuki Nakaoka, Some homological constructions on triangulated categories, *第 10 回 静岡代数学セミナー*, 2011 年 12 月 2 日, 静岡大学.

⑦ Hiroyuki Nakaoka, Tambara functor as a \mathbb{F}_p -bivariant analog of commutative ring, *空間の代数的・幾何的モデルとその周辺*, 2011 年 9 月 8 日, 京都大学.

⑧ 中岡宏行, 有限群上の丹原関手に対する代数的操作, *有限群のコホモロジー論とその周辺*, 2011 年 9 月 2 日, 京都大学.

⑨ Hiroyuki Nakaoka, On a generalization of the Dress construction for Tambara functors, and its application to the Witt-Burnside construction, *第 6 回代数・解析・幾何学セミナー*, 2011 年 2 月 16 日, 鹿児島大学.

⑩ Hiroyuki Nakaoka, A generalization of the Dress construction for a Tambara functor, and its application to the Witt-Burnside construction, *Séminaire de théorie des groupes*, 2011 年 2 月 2 日, Picardie-Jules Verne 大学 (Amiens, フランス).

⑪ Hiroyuki Nakaoka, A generalization of the Dress construction for a Tambara functor, and its application to the Witt-Burnside construction, *代数学セミナー*, 2011 年 1 月 7 日, 広島大学.

⑫ Hiroyuki Nakaoka, An Introduction to Triangulated Categories, *Adventures of Categories — Applied Category Theory Colloquium*, 2010 年 12 月 17 日, 京都大学.

⑬ Hiroyuki Nakaoka, Tambarization of a Mackey functor, in relationship to the Dress and the Witt-Burnside construction, *群論セミナー*, 2010 年 12 月 6 日, 北海道大

学.

⑭ Hiroyuki Nakaoka, Tambarization of a Mackey functor and an application to the Witt-Burnside construction, 組合せ論セミナー, 2010年9月8日, 東北大学.

⑮ 中岡宏行, 2-category 入門, 代数幾何研究会 2010, 2010年7月16日, 法政大学.

⑯ Hiroyuki Nakaoka, Categorical aspect of the Witt-Burnside construction, 第27回代数的組合せ論シンポジウム, 2010年6月22日, 高知大学.

⑰ Hiroyuki Nakaoka, Categorical aspect of the Witt-Burnside construction, Lefschetz fibration and category theory, 2010年6月6日, 大阪大学.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中岡 宏行 (HIROYUKI NAKAOKA)

鹿児島大学・理工学研究科・准教授

研究者番号 : 90568677