

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 23 日現在

機関番号：13903

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2012

課題番号：22740038

研究課題名（和文）結び目や曲面の組換、変形と位相的性質

研究課題名（英文） Topological properties of knots and surfaces through splicing and deformations

研究代表者

平澤 美可三 (HIRASAWA MIKAMI)

名古屋工業大学・工学研究科・准教授

研究者番号：00337908

研究成果の概要（和文）：

空間内の絡んだ輪のことを結び目といい、連続変形で互いに移り合う物を同値と見なす。結び目の重要な位相不変量にアレキサンダー多項式がある。結び目のアレキサンダー多項式の零点の配置を、ザイフェルト曲面を使って調べ、零点の様々な安定性に関する成果を挙げた。また曲面の輪郭線に注目した変形を調べ、三次元ユークリッド空間内の球面の正則ホモトピーによる裏返しの新しい視覚化を与えた。

研究成果の概要（英文）：

A tangled circle in the 3-space is called a knot, and we regard two knots to be equivalent when they can be deformed continuously into each other. One of the most important topological invariants of knots is the Alexander polynomial. We studied the distribution of zeros of the Alexander polynomials of knots, and by using Seifert surfaces, we obtained results on various stability properties. We also studied deformation of surfaces from the viewpoint of their contours. As a result, we gave a new visualization of the sphere eversion by regular isotopy.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	500,000	150,000	650,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
2012年度	500,000	150,000	650,000
総計	1,500,000	450,000	1,950,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：結び目理論, アレキサンダー多項式, ファイバー結び目

1. 研究開始当初の背景

三次元空間の絡まった輪の事を結び目といい、それらの集まりを絡み目という。構成する紐を切らずに互いに連続変形で移り合うものは同値とみなす。本研究では結び目のも

つ位相幾何学的な性質を研究対象とし、性質を引き出すために結び目を境界として持つ曲面を利用した。

2. 研究の目的

三次元空間における絡まった閉曲線のことを結び目、またそれらの集まりを絡み目と呼び、それらの位相幾何学的な性質を研究対象とする。例えば、(i) どの様にうまく配置できるか (ii) 補空間の構造はどうなっているか (iii) 絡み目からデーン手術と呼ばれる操作などでどのような三次元多様体を得られるか、などが挙げられる。

また結び目にはスライシングやスムージングといった組み換え操作が可能で、それにより (i) 如何にして解くことができるか(できないか) (ii) 変形によってどのような性質が保たれ、どのような性質が、どの様に変わるか (iii) 希望の結び目、絡み目を得るにはどのような操作を行えばいいか といった問題がある。三次元空間内に境界付きの曲面が埋め込まれている場合、曲面自体についても上の様な問題が考えられる。

### 3. 研究の方法

三次元空間内で自由に変形できる結び目の位相的性質を捉えることに於いて、トポロジカルな自由度を保ったまま結び目をある程度固定する必要がある。そのためには、その結び目を境界とする曲面を考えることが有効である。曲面を通じて結び目の変形(例えばパスマーブなど)に関する道筋を見いだす。

結び目の重要な不変量にアレキサンダー多項式がある。結び目の張る曲面やその変形を通じて、アレキサンダー多項式の零点の配置を調べる。特に零点の安定性やその変化を調べる。曲面その物も研究対象とし、今回は曲面の輪郭線を追う事により曲面の変形を調べる。例えば三次元空間内の球面の正則ホモトピーによる裏返しの視覚化を、曲面の自己交差集合や輪郭線の変形を通じて行う。

### 4. 研究成果

(1) 正則ホモトピーによる球面の裏返しの新しい視覚化を開発した。(山本稔氏との共同研究) 球面の裏返しは、1958 に S. Smale がその可能性を証明して以来、W. Thurston による再証明や、様々な研究者による具体的なプロセスが示されているが、今回は変形途中の球面の輪郭線に注目し、新しいプロセスを開発した。輪郭線の変形という観点からはこれまでで最も単純明快な方法になっていると思われる。また、輪郭線だけでなく、曲面全体についても描画した。これにより、自己交差の特異点の引き戻しも考察できるようになった。この一連の変形の視覚化は、コンピュータグラフィックスなどを用いなくても、実際に手で描いてみせることができる。こうして習得した技法は、今後絡み目補空間のファイブレーションや、二次元結び目のダイアグラムの視覚化などに応用が効くと期待される。

(2) 2008年に小林毅氏らと、絡み目のフラットプログラミングバスケット表示というものを開発した。これは、絡み目のザイフェルト曲面を自明なオープンブックに埋め込むことで、ザイフェルト曲面をある意味で標準的な位置におく物である。また、絡み目を数列によってコード化することができる。

今回、二つの絡み目がパスマーブと呼ばれる変形の有限回の繰り返しで移り合う場合には、それらの変形の繰り返しを追跡できるようなバスケット表示が構成できた。これは、台となる円盤上のダイアグラムは固定し、そこに与えられたラベルの入れ替えだけで、パスマーブをフォローすることを可能にする。

(3) 結び目及び絡み目のアレキサンダー多項式の零点の配置に関して成果をあげた(村杉邦男氏との共同研究)。近年、結び目の形が、

アレキサンダー多項式の係数のみならず、零点の配置についてもうまく反映することが知られてきている。特に零点が全て複素平面内の単位円周上にあるもの (circular stable と呼ぶ) 及び実軸上にあるもの (real stable と呼ぶ) が興味深い。

この研究は、ザイフェルト曲面などを用いた幾何学的な考察と、行列理論を用いた議論がうまくかみ合い、また、コンピュータ実験も様々な予想を立てるのに役立つ。

結び目の張るザイフェルト曲面から抽出した行列を調べ、曲面をひねる変形と、それに連動する零点の配置の変化を調べ、任意の結び目について、ザイフェルト曲面を十分に変形すると、零点がすべて単位円周上に運ばれることを証明した。絡み目についても零点の安定性について調べ、モンテシノス絡み目について、それ自身は circular stable であるが一方の向きを逆転すると real stable になるものをザイフェルト曲面を通じて構成した。零点の安定性は多変数のアレキサンダー多項式についても定義されるが、これらについては一変数に比べ格段に複雑になるため、今後の課題である。絡み目のアレキサンダー多項式の零点について、それらをメビウス変換によって変換したものを零点にもつ多項式は、またある絡み目のアレキサンダー多項式になることがある。よいメビウス変換を見つけて circular stable なものを real stable なものに変える変換になっていることを保証した。

rational knots については circular stable や real stable になる十分条件がいくつか分かっている。これを拡張して、quasi-rational knot (and links) というクラスを定義し、real stability を調べた。二つの結び目が real stable であり、しかもそれらの零点が実軸上に交互に現れるとき、interlacing property を持つという。

rational knots に関して interlacing property をもつ族を発見した。

quasi-rational knots に関しては完全に interlacing でなくとも、若干の自然な補正により interlacing になる状況を見出した。ここではアレキサンダー多項式そのものより、その補正とも言えるコンウェイ多項式の振る舞いを調べることで証明が簡略化できた。また新しい性質として、アレキサンダー多項式の零点が実軸上と単位円周上に現れるもの (bi-stable) についても構成法を発見し、成果を挙げた。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

1. 平澤美可三, 村杉邦男  
On stability of Alexander polynomials of Knots and links (survey) 査読有  
Knots in Poland III, Banach Center Publications, (掲載予定)
2. 平澤美可三, 鎌田直子, 鎌田聖一  
Bridge presentation of virtual knots. 査読有  
Jour. of knot theory and its ramifications,  
2011 vol 20, 881-893
3. 平澤美可三, 村杉邦男  
Evaluations of twisted Alexander polynomials of 2-bridge knots at  $\pm 1$ , 査読有  
Jour. of knot theory and its ramifications,  
2010 vol. 19, 1355-1400
4. 平澤美可三, 村杉邦男  
Fibred torti-rational knots, 査読有  
Jour. of knot theory and its ramifications,  
2010 vol. 19, 1291-1353

[学会発表] (計5件)

1. 平澤美可三  
有理結び目入門  
結び目の数理論セミナー「Knott ing Nagoya」  
名古屋市立大学 2013. 3. 5
2. 平澤美可三  
Sphere eversion, a new method  
The 9<sup>th</sup> East Asian School of knots and  
related topics. 東京大学 2013. 1. 15
3. 平澤美可三  
ファイバー結び目入門  
結び目の数理論セミナー「Knott ing Nagoya」  
名古屋工業大学 2012. 12. 15
4. 平澤美可三  
Sphere eversion, a new method.  
Workshop on computer graphics and  
mathematics, 神戸大学 2012. 1. 19
5. 平澤美可三

Study of knots by manipulating Seifert  
surfaces.  
Lifschetz fibrations and category  
theory, 大阪大学 2010. 6. 26

[その他]  
ホームページ等  
[http://researcher.nitech.ac.jp/  
html/100000100\\_ja.html](http://researcher.nitech.ac.jp/html/100000100_ja.html)

6. 研究組織
- (1) 研究代表者  
平澤 美可三 (HIRASAWA, Mi kami)  
名古屋工業大学・工学研究科・准教授  
研究者番号：00337908
- (2) 研究分担者 ( )
- (3) 連携研究者  
村杉 邦男 (MURASUGI, Kuni o)  
トロント大学 数学科 名誉教授