

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 14 日現在

機関番号：32678

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2010～2012

課題番号：22740045

研究課題名（和文）

球面のホモトピー群の周期的元に関する研究

研究課題名（英文）

Study on periodic elements in the homotopy groups of spheres

研究代表者

中井 洋史（NAKAI HIROFUMI）

東京都市大学・知識工学部・准教授

研究者番号：80343739

研究成果の概要（和文）：

クロマティックスペクトル系列の E_1 項の加群構造を用いて、アダムス・ノヴィコフスペクトル系列 E_2 項におけるデルタ元の自明性と非自明性に関するいくつかの結果を得た。またモチヴィックブラウン-ピーターソン理論による計算可能性と、 L_2 局所化された球面スペクトラムに関する GMHR 分解列に関連したファイバー列の存在に関するベーレンズとオルムスビーによる結果について考察した。

研究成果の概要（英文）：

We obtain some results on triviality and non-triviality of δ -elements in the Adams-Novikov E_2 -terms, using the module structures of some chromatic E_1 -terms. And we give some insights on the computability in the motivic Brown-Peterson theory, and on the fiber sequence related to GHMR-resolution of L_2 -localized sphere spectrum, which is conjectured by Behrens and Ormsby.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
2012年度	400,000	120,000	520,000
年度			
年度			
総計	1,700,000	510,000	2,210,000

研究分野：代数トポロジー

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：球面の安定ホモトピー群，Adams-Novikov スペクトル系列，有限 CW スペクトラム

1. 研究開始当初の背景

代数トポロジーでは様々な不変量を用いて空間の性質を調べるが、とりわけCW複体(またはスペクトラム)のホモトピー圏においてはホモトピー群が特別に重要な不変量として扱われる。ところが、一般にはCW複体のホモトピー群を求めることは極めて難しく、特に空間の基本的な構成要素である球面のホモトピー群の構造に関する研究は、位相幾何学の黎明期から現在に至るまでホモトピー論の中心的な問題であるとして認識されている。

球面の安定ホモトピー群を組織的に計算するための代表的な方法として、アダムス型スペクトル系列がある。特に、コホモロジー群とスティーンロッド代数に基づくアダムススペクトル系列は、ホモトピー群の素数2における状況を調べるために欠かせないツールであり、またホップ不変量やケルヴェア不変量など多様体に関する情報も数多く保有している。実際、ホップ不変量に関する問題は20世紀半ばにアダムス本人により解決され、さらに2009年にはヒル・ホプキンス・ラヴェネル等によりケルヴェア不変量1をもつ多様体に関する問題が概ね解決された。現在でも、アダムススペクトル系列については精力的な研究がなされている。

一方、ホモトピー群の奇素数の成分を調べるためには、ブラウン・ピーターソン理論に基づくアダムス・ノヴィコフスペクトル系列が有用であり、1977年にミラー・ラヴェネル・ウィルソンらが v_n 周期性に基づく BP_* の分解列からアダムス・ノヴィコフ E_2 項の計算する方法を確立して以来、各元の v_n 捻れに関する個別の情報も、 n が2よりも小さい場合は下村克己(高知大学)などによりかなり計算が進められてきた。しかし n が3以上の場合については、現在に至るまでほとんど何も分かっていない状況である。

申請者はアダムス・ノヴィコフスペクトル系列とアダムススペクトル系列の用いて現在まで継続して球面のホモトピー群の研究に取り組んできた。また、ラヴェネル(ロチェスター大学)と共同で、 $T(m)$ スペクトラムを用いて球面のホモトピー群の計算を帰納的におこなう手法についても研究してきた。

2. 研究の目的

- (1) 球面の安定ホモトピー群の奇素数成分に収束するアダムス・ノヴィコフスペクトル系列に関する解析をおこなう。特にアダムス・ノヴィコフ E_2 項における v_n 周期的な元の自明・非自明性について、 n が3以上の場合について考察する。
- (2) まだ構造が知られていないいくつかのクロマティック E_1 項の加群構造を、ミラー・ラヴェネル・ウィルソンの手法を主に用いながら決定する。さらに、それらの元のクロマティックスペクトル系列における挙動について調べる。
- (3) 特殊ユニタリ群 $SU(p^n)$ のループ空間から分類空間 BU への自然な写像から誘導されるベクトル束のThom空間を素数 p で局所化したスペクトラム $T(m)$ の安定ホモトピー群を概ね $2p(p^{m-3}-1)$ 次元以下まで調べ、その結果を元にして球面の安定ホモトピー群に関する計算をおこなう。

3. 研究の方法

- (1) 素数 p を固定した BP_*BP 余加群のホップ重代数から得られる Ext 群の構造を解析することにより、特に位数 p をもつようなギリシャ文字元の自明性・非自明性について調べる。
- (2) クロマティックスペクトル系列を用いた計算を、特に素数2の部分で未解決ないくつかの加群についてコンピュータのプログラムなどを活用しながらおこなう。
- (3) スペクトラム $T(m)$ の安定ホモトピー群を、ラヴェネル(ロチェスター大学)との共同研究で得たsmall descent スペクトル系列を用いて調べる。

4. 研究成果

- (1) デルタ元の自明性に関する結果が、 v_3 周期性をもつ BP_*BP 余加群の Ext 群である $\text{Ext}_{BP_*BP}^0(BP_*, M_1^2)$ を解析することによって得られた。また、非自明性に関する計算は、1986 年の下村克己 (高知大) による E(2) を元にした $\text{Ext}_{BP_*BP}^1(BP_*, M_1^1)$ の計算を、加藤諒氏 (名古屋大) が BP を元にした計算に書き換えることにより、部分的な結果が得られた。この研究成果は 2010 年の日本数学会秋期会において講演され、現在も継続して共同研究を続けている。
- (2) モチヴィックホモトピー圏におけるクロマティックな手法について整理して、位相的な安定ホモトピー圏において成り立つことがラヴェネルによって予想されホプキンスによって証明されたスマッシング定理やクロマティック収束定理などの類似が成り立つかどうか、あるいはモチヴィックブラウン・ピーターソン理論におけるモラヴァ安定化群の類似物の計算可能性やクロマティックな手法が適用可能になるために解決されるべき諸問題を整理し、2011 年 12 月の高知大学における談話会で講演した。
- (3) 代数幾何や数論幾何の研究者を中心として従来開催していた SGAD の集会を、2012 年 11 月にはホモトピー論の研究者も交えたものに拡大してシンポジウムを東京大において合同開催した。特に、海外からは T. バウワー氏と D. ゲプナー氏らを招聘して国内外の研究者と議論をおこなった。私はランドウェーバーの完全関手定理の周辺に関するサーベイトークを提供し、特に超楕円曲線の自己同型射から得られるホップ巫代数のいくつかの計算結果に関する講演をおこなった。
- (4) L_2 局所化された球面スペクトラムに関する GHMR 分解列に関連したファイバー列の存在に関するベーレンズとオルムスビーらによる 2012 年の結果を考察し、楕円曲線のレベ

ル構造から得られるホップ巫代数の Ext 群の構造をボックスインスペクトル系列を用いて調べた(この研究は現在も継続中である)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- (1) 中井洋史: “ラムダ代数を用いた Adams E_2 項の元の表示” 東京都市大学共通教育センター紀要, 査読無 6, 81-93(2013)
- (2) 中井洋史: “Motivic ホモトピー圏における Chromatic 的手法” 東京都市大学共通教育センター紀要, 査読無 5, 43-56(2012)
- (3) 中井洋史: “トポロジーの工学への応用 (現状と展望)” 東京都市大学共通教育センター紀要, 査読無 4, 91-103(2011)

[学会発表] (計 4 件)

- (1) 中井洋史: “Adams 型のスペクトル系列「(コ)ホモロジーからホモトピーへの架け橋」「解決した問題, 未解決の問題」” 代数的トポロジー 信州春の学校. (20130310). 信州大学.
- (2) 中井洋史: “Behrens’ $Q(N)$ spectra and Shimomura’ s β -elements” 高知ホモトピー論談話会. (20121228). 高知大学.
- (3) 中井洋史: “Exact Functor theorems and Elliptic cohomologies” SGAD2012, (20121115). 東京大学.
- (4) 中井洋史: “Toward understanding the motivic chromatic phenomena” 高知ホモトピー論談話会. (20111228). 高知大学.

- (5) 中井洋史, 加藤諒:” On p -torsion δ -elements in the Adams-Novikov spectral sequence” 日本数学会秋季会トポロジー分科会 (20100924) . 名古屋大学.

[図書] (計1件)

- (1) 井上健・山本史華・中井洋史 (共編)” 世界を読み解くリテラシー”. 萌書房. (2011)

[その他]

ホームページ等

<http://www.comm.tcu.ac.jp/~math/hnakai/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中井 洋史 (NAKAI HIROFUMI)

東京都市大学・知識工学部・准教授

研究者番号: 80343739