

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 30 日現在

機関番号：34406

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2010～2012

課題番号：22740050

研究課題名（和文）正則図形を用いた結び目や絡み目の研究

研究課題名（英文）Research on knots and links using their regular diagrams

研究代表者

塚本 達也（TSUKAMOTO TATSUYA）

大阪工業大学・工学部・准教授

研究者番号：10350480

研究成果の概要（和文）：単純リボン操作という，結び目や絡み目に対する局所変形を導入し，結び目や絡み目に与える影響について考察した．さらに，この操作を拡張し，単純リボン融合という特殊な融合も導入した．これについても結び目や絡み目に与える影響について考察した．いずれについても，結び目や絡み目の種数の変化，および結び目の素性について成果を得た．前者については単純リボン操作，単純リボン融合共に同様の結果が得られ，後者については除外すべき条件に違いが見られた．

研究成果の概要（英文）：We introduced local moves on knots and links, called simple ribbon moves and studied their effect on knots and links. Moreover, we extend the moves to a special kind of fusions, called simple ribbon fusions. We also studied their effect on knots and links. In both cases we obtained results on genera of knots and links, and on primeness of knots. In the former topic, there are no difference between the statements on simple ribbon moves and simple ribbon fusions. However, in the latter topic, there is a difference in the exceptional cases.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011 年度	600,000	180,000	780,000
2012 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,300,000	690,000	2,990,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何学，結び目理論

1. 研究開始当初の背景

空間内の有限個の単純閉曲線の集合を絡み目という．単純閉曲線が1個の絡み目を特に結び

目と呼ぶ．絡み目をアンビエント・イソトピーという同値関係で割った同値類を絡み目型と呼ぶ．

本研究の目的は正則図形を用いて絡み目を研究することである．正則図形とは絡み目を平面

に射影して、各交差に空間での上下の情報を与えたものである。正則図形は平面上にあるので取り扱いやすい。しかし絡み目は無限種類の正則図形を持ちうるので、正則図形から絡み目の型や不変量の値を判定することは一般に困難である。

互いに交わらない単純閉曲線からなる正則図形を自明的といい、自明な正則図形を持つ絡み目を自明な絡み目という。自明な絡み目は最も単純な絡み目である。従って、与えられた絡み目の型が自明か否かを判定することは絡み目の分類の第一段階である。その中で Bankwitz [1] は自明な結び目が持ちうる交代正則図形を決定し、Crowell [2]と Murasugi [3] は自明な絡み目が持ちうる交代正則図形を決定した。ここで、各閉曲線をたどったとき交差の上下が交互に現れる正則図形を交代的という。交代正則図形を持つ絡み目(交代絡み目と呼ぶ)は重要で非常に良く研究されている。上記の研究により、交代正則図形として与えられた絡み目の型が自明か否かを判定することが可能になった。

研究代表者は上記論文[1][2][3]の結果を拡張し、自明な結び目[5]と自明な絡み目[4]が持ちうる概交代正則図形を決定した。ここで n 個の交差の上下を入れ替えると交代的になる正則図形を n 概交代的といい、 $n=1$ のとき単に概交代的という($n=0$ のときは交代的)。

[1] C. Bankwitz, Über die Torsionszahlen der alternierenden Knoten, Math. Ann. **103** (1930) 145–161.

[2] P.H. Crowell, Genus of alternating link types, Ann. of Math. (2) **69** (1959) 258–275.

[3] K. Murasugi, On the genus of the alternating knot I, II, J. Math. Soc. Japan **10** (1958) 94–105, 235–248.

[4] T. Tsukamoto, A criterion for almost alternating links to be non-splittable, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **137** (2004) 109–133.

[5] T. Tsukamoto, The almost alternating diagrams of the trivial knot, J. Topology **2** (2009) 77–104.

2. 研究の目的

本研究の目的は正則図形を用いて結び目や絡み目を研究することである。特に正則図形として与えられた結び目や絡み目の型が自明か否かの判定について研究する。

3. 研究の方法

専ら研究代表者が単独で行うが、必要に応じて研究協力者を加えて研究課題を遂行する。

基本的に結び目や絡み目の補空間内の(埋め込まれた、もしくははめ込まれた)複数の曲面を考え、それらの交差を解析することで解決する。

4. 研究成果

・ 単純リボン操作に関する研究

単純リボン操作という結び目や絡み目に対する局所操作を定義し、ある一定の自然な条件の下にこの局所操作が結び目や絡み目の種数を増加させることを示した。従って単純リボン操作は結び目や絡み目の型を変える。さらには、ある結び目(絡み目)に単純リボン操作を施して得られた結び目(絡み目)は、元の結び目(絡み目)が自明か非自明かに関わらず、その結び目(絡み目)は非自明であることが言える。主結果である種数の増加を示すにあたっては単純リボン操作を与えるタングルの張るリボンディスクと、絡み目(結び目)の張るザイフェルト曲面の交差を解析することで示した。

また、種数を変化させないための必要十分条件についても考察したが、一般的な種数の場合、自然な形では得られないことを示した。すなわち、絡み目の型は変えるのであるが、種数は変化させない例があることを示した。そのため、名古屋工業大学の平澤美可三氏に協力を仰ぎ、 h -complexity という、オイラー数と相性の良い新たな絡み目の不変量を導入した。これについては自然な形で種数を変化させないための必要十分条件を与えることができた。

さらに、単純リボン操作が結び目や絡み目のアレキサンダー多項式に与える影響についても研究した。単純リボン操作は1型と2型に分かれるが、1型については結び目や絡み目のアレキサンダー多項式を変えないことを示した。従ってアレキサンダー多項式が自明なりボン型結び目を無限に系統的に与えることができた。また2型については常にアレキサンダー多項式を変化させることを示し、その変化量も求めた。これらは東京女子大学の小林一章氏と本学の渋谷哲夫氏に協力を仰いで成し遂げた。

加えて、自明な結び目から単純リボン操作を施して得られた結び目の素性についても研究した。このような結び目は、ある一定の自然な例外とスクエア結び目になる一例を除いて素であることを示すことができた。これは単純リボン操作を与え

るタングルと自明な結び目が張るリボンディスクと、素分解球面との交差を解析することで示した。

さて1型の場合も結び目や絡み目の型が変われば種数は増加するので非自明であることが分かるが、型を変える必要十分条件は単純リボン操作に付随する単純リボンタングルが完全分離ではないことである。しかしながら与えられた単純リボンタングルが完全分離か否かを示すのは容易ではない。そこで先の小林一章氏、渋谷哲夫氏との共同研究では単純リボンタングルに付随する絡み目(付随絡み目)を導入して、単純リボンタングルが完全分離であれば付随絡み目も完全分離であることを示した。

これを受けて本学の渋谷哲夫氏と共に、付随絡み目を拡張した付随グラフを導入し、付随グラフが完全分離であることと、単純リボンタングルが完全分離であることが同値であることを示した。付随絡み目では判定には弱く、単純リボンタングルが完全分離であるための十分条件しか与えられなかったが、付随グラフに拡張することで必要十分条件を与えられたことは大きい。結果、完全分離であることを示せなかったいくつかの単純リボンタングルについて、完全分離であることを示すことができた。

・ 単純リボン融合に関する研究

前述の単純リボン操作を拡張し、単純リボン融合を導入した。ここではゴールドバーグによって導入された絡み目の分離数と(一般的な種数を精密化した) ν 次種数との関連について研究した。主定理として単純リボン融合は絡み目の分離数を上げず、 ν 次種数は下げないことを示した。

さらに等号成立(すなわち分離数が等しく、最大 ν 次種数が等しい)のための必要十分条件を自然な形で与えることができた。その結果自明な結び目や絡み目から単純リボン融合で得られた結び目や絡み目がいつ自明か否かが判定できるようになった。また単純リボン操作から単純リボン融合に拡張したことで、木下-寺坂結び目が非自明であることの簡単な証明を与えることができた。

ところでリボン結び目やリボン絡み目から単純リボン融合で得られた結び目や絡み目もリボンになる。ここで全てのリボン結び目が自明な結び目から単純リボン融合で得られるかというのは自然な問題であるが、その反例となる結び目を無限個与えることができた。これらの結果は本学の岸本健吾氏と渋谷哲夫氏の協力を仰ぎ成し遂げ現在論文にまとめており、完成し次第専門誌に投稿する。

また、自明な結び目から単純リボン融合を施して得られた結び目の素性についても研究した。単純リボン操作の場合、このような結び目は、ある一定の自然な例外とスクエア結び目になる一例を除いて素であったが、単純リボン融合の場合、さらに2つの8の字結び目の連結和も除く必要があり、単純リボン操作と非自明な違いが見られた。本研究も本学の岸本健吾氏と渋谷哲夫氏の協力を仰ぎ成し遂げ現在論文にまとめており、完成し次第専門誌に投稿する。

・ Z_2 -代数的に分離した絡み目の研究

自己パス操作という局所変形がある。絡み目 L が自己パス操作で(毎回適用する成分は変わってもよい)自明にできるとき、自己パス自明であるという。さらに、任意の成分 K_i について、その成分のみに対する自己パス操作でその成分を $R_3(L-K_i)$ で自明にできるとき、 L は強自己パス自明であるという。強自己パス自明であれば、任意の順序で全ての成分をその成分のみの自己パス操作により自明に、結果 L を自明にすることができる。

また2つの絡み目 $L=k_1Uk_2U\cdots Uk_n$, $L'=k'_1Uk'_2U\cdots Uk'_n$ が、どの2成分についても対応する絡み数が2を法として消えている、すなわち $lk(k_i, k_j) \equiv lk(k'_i, k'_j) \pmod{2}$ であるとき、 Z_2 -代数的にホモガスであるという。分離した2つの Z_2 -代数的に分離した絡み目 L と L' から対応する成分 k_i, k'_i を融合して得られた絡み目 $L\#L' = K_1Uk_2U\cdots Uk_n$ は Z_2 -代数的に分離している、すなわち $lk(K_i, K_j) \equiv 0 \pmod{2}$ である。

そこで本学の渋谷哲夫氏に協力を仰ぎ、 $L\#L'$ と融合の際に成分に捻りを加えて得られた絡み目が自己パス同値となるための代数的十分条件を与えた。またブルーニアン性を持つリボン絡み目は強自己パス自明であることも示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- ① K. Kobayashi, T. Shibiya, T. Tsukamoto, Simple ribbon moves for links, Osaka Journal of Math, 査読有, 2013, 掲載決定。
- ② T. Shibiya, T. Tsukamoto, Simple ribbon moves and primeness of knots, Tokyo Journal of Math, 査読有, 2013, 掲載決定。

- ③ T. Shibiya, T. Tsukamoto, On attendant graph of simple ribbon moves for links, Mem. Osaka Inst. Tech. Ser. A, 査読有, 56, 2011, 19-23. URL:
<http://www.oit.ac.jp/japanese/toshokan/tosho/kiyou/rikouhen/56-1/02r.pdf>
- ④ T. Shibiya, T. Tsukamoto, Self pass-equivalence of Z_2 -algebraically split links, Mem. Osaka Inst. Tech. Ser. A, 査読有, 55, 2010, 25-28. URL:
<http://www.oit.ac.jp/japanese/toshokan/tosho/kiyou/rikouhen/55-1/03.pdf>

[学会発表] (計 3 件)

- ① 塚本達也, h-complexity of links, 2012 琉球結び目セミナー, 2012 年 9 月 3 日, てんぶす那覇
- ② 岸本健吾, 渋谷哲夫, 塚本達也, Simple ribbon fusions for links, 研究集会「結び目の展望」, 2012 年 3 月 18 日, 早稲田大学
- ③ 岸本健吾, 渋谷哲夫, 塚本達也, Simple ribbon fusions for links, Friday Seminar on Knot Theory, 2011 年 10 月 21 日, 大阪市立大学

[その他]

ホームページ

<http://www.oit.ac.jp/ge/~tsukamoto/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

塚本 達也 (TSUKAMOTO TATSUYA)
大阪工業大学・工学部・准教授
研究者番号 : 10350480