

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 18 日現在

機関番号：17102

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22740056

研究課題名(和文)半正定値計画問題に対する高精度計算アルゴリズムの開発

研究課題名(英文)Development of highly accurate algorithms for semidefinite programming problems

研究代表者

脇 隼人(WAKI, Hayato)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・准教授

研究者番号：00567597

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円、(間接経費) 810,000円

研究成果の概要(和文)：悪条件な半正定値計画問題に対して高精度な解を求めるために、悪条件性を取り除く前処理アルゴリズムの提案・開発を行った。悪条件な半正定値計画問題とは、その問題とその双対問題が実行可能内点解を持たない半正定値計画問題である。具体的な成果は、(1) 悪条件な半正定値計画問題に対して良条件な半正定値計画問題、つまり、実行可能内点解を持つ等価な半正定値計画問題を半正定値計画問題を生成する前処理の提案、(2) いくつかの応用問題から派生する半正定値計画問題に対して、悪条件になる原因の追及、(3) 特に多項式最適化問題に対して、良条件な半正定値計画問題を生成する手法の提案をした。

研究成果の概要(英文)：We mainly proposed an algorithm to remove ill-conditionedness in a given semidefinite programming problems (SDPs). In particular, we focus on ill-conditioned SDP, i.e., the SDP or its dual do not have any interior feasible solutions. Our results are: (1) We proposed a pre-processor for ill-conditioned SDP. It generates an equivalent and well-conditioned SDP with the original. Furthermore, we proposed a similar pre-processor for conic optimization problems, (2) We traced a reason why the resulting SDP from some applications are ill-conditioned, (3) We proposed an algorithm to generate well-conditioned SDP for polynomial optimization problems.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：半正定値計画 面的縮小 多項式最適化問題 半正定値計画緩和 高精度計算 対称錐上の線形最適化問題

1. 研究開始当初の背景

半正定値計画問題とは、変数が行列で、半正定値という条件と与えられている線形方程式を満たしている変数行列の中で、線形の目的関数を最適化する最適化問題であり、特に凸最適化問題に分類され、主双対内点法を適用することで、効率よく最適解を求めることができる。

ところで主双対内点法が効率よく最適解を求めることができるのは、与えられた半正定値計画問題とその双対問題がともに実行可能内点解を持つときである。いいかえると、一方が実行可能内点解を持たない場合は、主双対内点法が効率よく最適解を求められないかもしれない。経験的には主双対内点法が数値的に不安定になる場合がある、といわれている。

したがって、与えられた半正定値計画問題に対して、それとその双対問題の両者が実行可能内点解を持つことを確認してから、主双対内点法を適用するべきである。一方で、半正定値計画問題は数学、制御、統計など様々な分野で利用されているが、必ずしも実行可能内点解の存在を確認せずに主双対内点法を適用しているのが現状である。

2. 研究の目的

本研究の目的は次の2つである:

(1) 与えられた半正定値計画問題またはその双対問題が実行可能内点解を持たない場合、主双対内点法を適用すると、アルゴリズムがしばしば数値的不安定になる。したがって、何らかの方法でこの数値的不安定性を取り除く必要がある。

(2) 半正定値計画問題がこのように悪条件になるのは、元の最適化問題やモデル化に原因があるはずである。元の最適化問題にどのような原因があると、半正定値計画問題が悪条件になるのか理由を突き止めるべきである。

3. 研究の方法

2の研究目的であげた二項目について以下の方法でアプローチした:

(1) 半正定値計画問題を含むより広いクラスに属する錐最適化問題に対して、実行可能内点解が存在するかどうか突き止めるアルゴリズムを考えた。

(2) 半正定値計画問題は、組合せ最適化、制御、統計など幅広い分野で扱われており、このままでは「元の最適化問題」の意味が広すぎる。そこで、より扱いやすい、多項式最適化問題とグラフ等分割問題に限定して、議論した。すなわち、これらから得られる半正定値計画問題がまたはその双対問題が実行可能内点解を持たなければ、元の最適化問題はどのような性質を持っているのか、ということを考えて。

4. 研究成果

2の研究目的であげた二項目について得られた成果を記述する:

(1) 錐最適化問題、特に錐が nice cone と呼

ばれる性質を持たない錐最適化問題に対して、もし実行可能内点解を持たなければ、等価で実行可能内点解を持つ錐最適化問題を生成する、あるいは実行不可能性を判定するアルゴリズムを提案した。(雑誌論文 4) このアルゴリズムは、実行可能内点解を持つ場合は、そのことを判定できる。これは、Ramana, Ramana-Tuncel-Wolkowica や Pataki のアルゴリズムの拡張になっている。一方、このアルゴリズムをソフトウェア化し公開する予定であったが、数値計算では正確には判定できないアルゴリズムであり、現状ではまだ実装できるレベルではない。次の(2)にも続くが、これを実現するべきかどうかも含めて、またそうであればどう実装するか、ということは今後の課題である。

(2) 制約式がない多項式最適化問題に対しては、得られる二乗和表現が疎性を持つ場合、半正定値計画緩和問題の双対問題が実行可能内点解を持たないことがわかった。(雑誌論文 9) またこれを拡張して、制約式がある多項式最適化問題に対しても同様の議論が得られた。(雑誌論文 8) この過程で、弱実行不可能な半正定値計画問題の生成する議論をした。(雑誌論文 5)。弱実行不可能性は、非線形最適化問題に現れる特異な性質であるが、今までは、そのような性質を持つ半正定値計画問題は、ある意味で人工的なものであった。この議論では、ある性質を持つように多項式最適化問題を構成すると、得られる半正定値計画問題の双対問題が弱実行不可能になることを示している。

グラフ等分割問題から得られる半正定値計画問題が実行可能内点解を持たないことを示し、実行可能内点解をもちかつより疎性を持つような等価な半正定値計画問題を生成できることを示した(雑誌論文 4) 一方で、元のグラフ等分割問題に対して、ある等価な変形をすると得られる半正定値計画問題が実行可能内点解を持つこともわかった。

多項式最適化問題やグラフ等分割問題の議論から見えたことは、実行可能内点解を持たない半正定値計画問題が得られる場合、元の最適化問題の性質が悪く、その悪さを半正定値計画問題が継承してしまう、ということである。一方でこの悪さを取り除くと、得られる半正定値計画問題は実行可能内点解を持つだけでなく、(i) 規模が小さくなる、(ii) 疎性が向上する、したがって、計算効率が向上する。今後は、元の最適化問題の悪条件性を取り除くモデリング手法の提案・開発に取り組む予定である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に

は下線)

〔雑誌論文〕(計9件)

1. Yoshiyuki Sekiguchi, Tomoyuki Takenawa and Hayato Waki, Real ideal and the duality of semidefinite programming for polynomial optimization, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 査読有, 20, 2013, 321-330, DOI:10.1007/s13160-013-0104-6
2. Takayuki Osogami, Tomoyuki Shirai and Hayato Waki, Remarks on positivity of alpha-determinants via SDP relaxation, Journal of Math-for-Industry, 査読有, 5, 2013, 1-10.
3. Mirai Tanaka, Kazuhide Nakata and Hayato Waki, Numerical reduction method for doubly nonnegative optimization problems, 査読有, 5, 2013, 41--50
4. Hayato Waki and Masakazu Muramatsu, Facial Reduction Algorithms for Conic Optimization Problems, Journal of Optimization Theory and Applications, 査読有, 158, 2013, 188-215, DOI: 10.1007/s10957-012-0219-y
5. Hayato Waki, How to generate weakly infeasible semidefinite programs via Lasserre's relaxations for polynomial optimization, Optimization Letters, 査読有, 6, 2012, 1883--1896, DOI: 10.1007/s11590-011-0384-1
6. Mirai Tanaka, Kazuhide Nakata and Hayato Waki, Application of a facial reduction algorithm and an inexact primal-dual path-following method for doubly nonnegative relaxation for mixed binary nonconvex quadratic optimization problems, Pacific Journal of Optimization, 査読有, 8, 2012, 699-724
7. Sunyoung Kim, Masakazu Kojima, Hayato Waki and Makoto Yamashita, SFSDP: a Sparse version of Full SemiDefinite Programming relaxation for sensor network localization problems, ACM Transactions on Mathematical Software, 査読有, 38, 2011, 27:1-19, DOI:10.1145/2331130.2331135
8. Hayato Waki and Masakazu Muramatsu, An extension of the elimination method for a sparse SOS polynomial, Journal of the Operations Research Society of Japan, 査読有, 54, 2011, 161-190, DOI: 10.1007/s10589-011-9437-8
9. Hayato Waki and Masakazu Muramatsu, A Facial Reduction Algorithm for Finding Sparse SOS Representations, Operations Research Letters, 査読有,

38, 2010, 361-365, DOI: 10.1016/j.orl.2010.05.011

〔学会発表〕(計26件)

1. Hayato Waki, A perturbed sums of squares theorem for polynomial optimization and its applications, JST CREST & ERATO 講演会, 2012, May, Tokyo.
2. Hayato Waki, A perturbed sums of squares theorem for polynomial optimization and its applications, Optimization: Computation, Theory and Modeling, 2012, Nov., Singapore.
3. Hayato Waki, Computation of Facial Reduction, INFORMS Annual Meeting 2012, 2012, Oct., USA.
4. Hayato Waki, Computation of facial reduction algorithm, 21st International Symposium on Mathematical Programming, 2012, Aug., Germany.
5. Hayato Waki, On a smaller SDP relaxation for Polynomial Optimization Problems, Workshop on Optimization at Fields Institute, 2011, Sep., Canada.
6. Hayato Waki, SemiDefinite Programming Relaxation for Polynomial Optimization Problems, Tutte Seminar at Combinatorial and Optimization, 2011, June, Canada.
7. Hayato Waki, Strange Behaviors of Interior-point Methods for Solving Semidefinite Programming Problems in Polynomial Optimization, SIAM Conference on Optimization 2011, 2011, May, Germany.
8. Hayato Waki, Strange Behaviors of Interior-point Methods for Solving Semidefinite Programming Problems in Polynomial Optimization, 2nd Alpen-Adria Workshop on Optimization, 2011, May, Austria.
9. Hayato Waki, SparsePOP: A Sparse Semidefinite Programming Relaxation of Polynomial Optimization Problems, Inform's Annual Meeting - Austin, Texas 2010, Nov., USA.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

アウトリーチ活動

1. 脇 隼人, 最適化手法の全体像, 2013年度プラントモデリング部会, 富士通研究所, 2013年7月.

6. 研究組織

(1)研究代表者

脇 隼人 (WAKI, Hayato)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研
究所・准教授

研究者番号：00567597