

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年6月3日現在

機関番号：16101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2012

課題番号：22740065

研究課題名（和文）パラメータ付き多項式の数式処理とその応用

研究課題名（英文）Algorithms for systems of parametric polynomials

研究代表者

鍋島 克輔 (NABESHIMA KATSUSUKE)

徳島大学・大学院ソシオ・アーツ・アンド・サイエンス研究部・准教授

研究者番号：00572629

研究成果の概要（和文）：強いイデアルの安定性条件を導出した。また、その条件を用いることによって、媒介変数付きイデアルの包括的グレブナー基底系を効率的に計算するアルゴリズムを得た。特異点解析のため代数的局所コホモロジーを使ったアプローチを示すと共に、効率的な代数的局所コホモロジー計算アルゴリズムを得た。また、この代数的局所コホモロジー計算アルゴリズムを媒介変数付きシステムの場合まで拡張した。

研究成果の概要（英文）：A new stability condition of monomial bases was introduced. This stability condition is stronger than other known one. The new algorithm for computing comprehensive Gröbner systems, based on the new stability condition, was also introduced. Moreover, in this research, new efficient algorithms for computing algebraic local cohomology classes associated with (semi-quasihomogeneous) singularities, were presented. The new algorithms were also generalized to parametric cases.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,700,000	510,000	2,210,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
2012年度	700,000	210,000	910,000
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：アルゴリズム, 関数論, 情報基礎, 代数学

1. 研究開始当初の背景

媒介変数を持つシステム（系）は時に媒介変数のある値によりドラスティックにシステム自体の性質が変化する。このシステムを媒介変数が介在したままの表現で**誤差無しで数式処理を行う**ことは、問題を解決する上で必要な処理である。これにより媒介変数の値によって起こりうる現象を分類できる。

研究開始当初、誤差無しで媒介変数を持つシステムを扱う方法として、包括的グレ

ブナー基底を用いる方法があった。しかしながら、当時の包括的グレブナー基底計算アルゴリズムは効率的ではなく、まだまだ改良の必要があるものであった。それゆえ、実際、包括的グレブナー基底を具体的に応用として扱われた例が乏しかった。

特異点の分類研究などの昔から存在する研究分野は多くの研究者により研究されており現在は計算機を使わなければならない

ような複雑なものや高次元なものが残されているのみである場合が多い。まして、媒介変数がシステムに介入すると複雑さは尋常ではないものとなる。そこで、より良いアルゴリズムの構築、高速計算、いかに媒介変数の処理をするかが重要となる。

研究開始当初、代数的局所コホモロジーを使うことによって特異点の性質の解析が可能であることが田島慎一氏（筑波大学教授）によって発表されていた。しかし、代数的局所コホモロジーを使った効率的なアルゴリズムの実装、応用がまだまだ行われていないと共に、計算機代数学の計算テクニックもまだまだ特異点の性質解析のためには使われていなかった。もちろん、代数的局所コホモロジーを用いた特異点解析用の計算ソフトウェアも存在しなかった。

2. 研究の目的

媒介変数を持つシステム（系）の数式処理を目的とする。システムに媒介変数が介入したままの表現で誤差無しで計算するためのアルゴリズムを研究する。具体的には次の3つを主な研究目的とした。1つ目は包括的グレブナー基底系の効率的な計算アルゴリズムの研究、2つ目は包括的グレブナー基底系を使った応用研究、3つ目は媒介変数が介入した方程式やシステムで定義された特異点解析のためのアルゴリズムの研究である。

グレブナー基底の理論は昨今の数式処理においては欠かせない主となる理論である。媒介変数を持つシステムのグレブナー基底を考えるのならば媒介変数付きグレブナー基底、すなわち包括的グレブナー基底の理論が必要である。この理論・計算法はまだまだ研究・改善の余地がある。また、包括的グレブナー基底系の応用研究の数も多くないことから応用研究をすることも1つも目的である。

特異点を解析するための計算として代数的局所コホモロジー計算をベースとした特異点解析アルゴリズムの研究をする。媒介変数付き代数的局所コホモロジーを用いた特異点解析用の計算プログラムを作成する。

3. 研究の方法

本研究については基本的に研究代表者が実施した。しかし、適宜各分野の専門家の適切なアドバイス・協力を仰ぐと共に共同で研究を行うようにした。

○包括的グレブナー基底については包括的グレブナー基底計算アルゴリズムで有名な東京理科大学の佐藤洋祐教授のアドバイスを仰ぐようにした。また、媒介変数の成す集合の集合演算に関しては、必要があれば、媒介変数を持つシステムの研究を行っている Politécnica de Catalunya 大学（スペイ

ン）の Antonio Montes 教授の意見・アドバイスを仰ぐと共に、記号代数計算に詳しい J. Kepler 大学（オーストリア）の Franz Winkler 教授のアドバイスを適時仰ぐようにした。

○特異点に付随する代数的局所コホモロジーの理論に関しては筑波大学の田島慎一教授と近畿大学の中村弥生准教授から適宜指導を仰ぐと共に共同研究を行うようにした。

理論面では、包括的グレブナー基底系においては、最新のアルゴリズムはイデアルの安定性理論を用いていることから、安定性理論の研究を行う。その後、得られた結果を包括的グレブナー基底系計算法につなげる方法をとった。

特異点に関しては、田島慎一氏（筑波大学教授）と共同で研究を行った。また、現在までに確立した代数的局所コホモロジー計算アルゴリズムと他の数式処理のテクニックを融合する方法をとり、介変数付き代数的局所コホモロジー計算アルゴリズムの研究を行った。

4. 研究成果

本研究における成果は大きく分けて次の2つである。

(1) 包括的グレブナー基底系計算

今までのイデアルの安定条件より“さらに強い”安定条件を導出し、その条件を用いて今までの包括的グレブナー基底系計算アルゴリズムを改良した。これにより計算効率が大幅に上がった包括的グレブナー基底系計算の新しいアルゴリズムを得ることができた。

包括的グレブナー基底系の応用としては電気回路の分類、共振状態に着目し媒介変数の状態を分析する研究を行った。

(2) 特異点解析のための計算アルゴリズム

代数的局所コホモロジー計算アルゴリズムを媒介変数付きシステムまで拡張した。これにより、特異点解析に重要となる媒介変数付きスタンダード基底も計算可能となった。媒介変数付きスタンダード基底計算アルゴリズムは、世界的に見てこれが初めてのものである。また、半擬斉次な特異点に付随する代数的局所コホモロジーの効率的な計算アルゴリズムも発表した。このアルゴリズムは従来のアルゴリズムと比べ数倍から数十倍高速なものとなっている。

代数的局所コホモロジーを用いて特異点を解析することは、従来と比べて効率的であり、また多くのことに利用できる有用なものであることが確認できた。

本研究で得られた計算アルゴリズムは計算機代数システム Risa/Asir 上に実装した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

- ① Katsusuke Nabeshima, Tajima Shinichi, On the computation of algebraic local cohomology classes associated with semi-quasihomogeneous singularities, Advanced studies in pure mathematics, 査読有, 2013 掲載予定
- ② 鍋島 克輔, 田島 慎一, μ -constant deformation に対する代数的局所コホモロジーと Tjurina stratification, 数理解析研究所講究録, 査読無, 2013 掲載予定
- ③ Katsusuke Nabeshima, Stability conditions of monomial bases and Comprehensive Gröbner systems, Proc. CASC 2012, Lecture Notes in Computer Science (Springer), 査読有, Vol. 7442, 2012, pp. 248-259, <http://www.springer.com/computer/theoretical+computer+science/book/978-3-642-32972-2>
- ④ Katsusuke Nabeshima, On an implementation of standard bases, Gröbner bases and normal-form using algebraic local cohomology, Communications of Japan Society of Symbolic and Algebraic Computations, 査読有, Vol. 1, 2012, pp. 1-25, <http://www.jssac.org/Editor/CJssac/V01/index.html>
- ⑤ 鍋島 克輔, 田島 慎一, パラメータ付き代数的局所コホモロジーの計算について -- 半擬斉次孤立特異点の場合 --, 数理解析研究所講究録, 査読無, Vol. 1785, 2012, pp. 111-122, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1785.html>
- ⑥ 鍋島 克輔, CGS 計算アルゴリズムのさらなる改良, 数理解析研究所講究録, 査読無, Vol. 1815, 2011, pp. 29-40, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1815.html>
- ⑦ 鍋島 克輔, 中村 弥生, 田島 慎一, 代数的局所コホモロジーの計算法とそれを用いたスタンダード基底・グレブナー基底について, 査読無, 数理解析研究所講究録, 査読無, Vol. 1764, 2011, pp. 102~125, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1785.html>

[学会発表] (計 15 件)

- ① 鍋島 克輔, 田島 慎一, μ -constant deformation 代数的局所コホモロジーを用いた Tjurina 数のパラメータ依存性の解析, 2013. 1. 27, 日本数学会 中国・四国支部例会, 高知大学 (高知県)
- ② 鍋島 克輔, μ -constant deformation に対する代数的局所コホモロジーと Tjurina stratification, 2012. 12. 26, 数理解析研究所研究集会 「Computer Algebra-Design of Algorithm, Implementations and the Next Generation」, 京都大学 (京都府)
- ③ 鍋島 克輔, CGS と minimal CGS の計算について, 2012. 1. 21, 第 4 回日本数式処理学会理論分科会&システム分科会合同研究会, 仙台青葉カルチャーセンター (宮城県)
- ④ 鍋島 克輔, 田島 慎一, パラメータ付き代数的局所コホモロジーの計算について -- 半擬斉次の場合 --, 2011. 12. 8, 数理解析研究所研究集会 「Computer Algebra-Design of Algorithm, Implementations and the Next Generation」, 京都大学 (京都府)
- ⑤ 鍋島 克輔, 田島 慎一, 半擬斉次孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジーについて, 2011. 9. 29, 日本数学会秋季総合分科会(函数論), 信州大学 (長野県)
- ⑥ 鍋島 克輔, 田島 慎一, Semi-quasihomogeneous isolated singularity に付随する代数的局所コホモロジーについて, 2011. 9. 8, 日本数式処理学会, 神戸大学, (兵庫県)
- ⑦ Katsusuke Nabeshima and Tajima Shinichi, On the computation for algebraic local cohomologies associated with semi-quasihomogeneous singularities, 2011. 9. 5, The 6th Franco-Japan Symposium on Singularities, Kyushu University (福岡県)
- ⑧ 鍋島 克輔, イデアルはいつ安定か?, 2011. 2. 15, JST CREST 「現代社会の産業とグレブナー基底の調和」若手研究集会, 山口大学 (山口県)
- ⑨ 鍋島 克輔, グレブナー基底とその応用 -- 集合制約と共振について --, 2010. 12. 17, 徳島数学談話会, 徳島大学 (徳島県)
- ⑩ 鍋島 克輔, CGS 計算アルゴリズムのさらなる改良, 2010. 12. 3, 数理解析研究所研究集会 「Computer Algebra -Design of Algorithms, Implementations and

- Applications」, 京都大学 (京都府)
- ⑪ 鍋島 克輔, 中村 弥生, 田島 慎一, On an implementation of standard bases and Gröbner bases using algebraic local cohomology, 2010.12.2, 数理解析研究所研究集会「実閉体上の幾何と特異点論への応用」, 京都大学 (京都府)
 - ⑫ 鍋島 克輔, ブーリアン・グレブナー基底, 2010.9.9, JST CREST 「現代社会の産業とグレブナー基底の調和」若手研究集会, 神戸大学 (兵庫県)
 - ⑬ Katsusuke Nabeshima, Nakamura Yayoi and Tajima Shinichi, Using algebraic local cohomology with parameters, 2010.6.25, International Conference on Applications of Computer Algebra (ACA 10), University of Vlora (アルバニア)
 - ⑭ Katsusuke Nabeshima and Yoshida Hiroshi, Derivation of resonant conditions with CGS, 2010.6.25, International Conference on Applications of Computer Algebra (ACA10), University of Vlora (アルバニア)
 - ⑮ 鍋島 克輔, 吉田 寛, CGS を用いた共振条件導出, 2010.6.13, 日本数式処理学会大会, 名古屋大学 (愛知県)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

鍋島 克輔 (NABESHIMA KATSUSUKE)
徳島大学・大学院ソシオ・アーツ・アンド・サイエンス研究部・准教授
研究者番号：00572629

(2) 研究分担者

無し

(3) 連携研究者

無し

(4) 研究協力者

田島 慎一 (TAJIMA SHINICHI)
筑波大学大学院・数理物質系・教授
研究者番号：70155076