

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 21 日現在

機関番号：15401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22740081

研究課題名(和文)ポテンシャル解析による非線形偏微分方程式の研究

研究課題名(英文)Studies on nonlinear partial differential equations via potential analysis

研究代表者

平田 賢太郎(Hirata, Kentaro)

広島大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：30399795

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円、(間接経費) 960,000円

研究成果の概要(和文)：非線形偏微分方程式の解の性質および境界付近での挙動が領域の複雑さと非線形性に如何に影響されるかをポテンシャル論の観点から研究を行った。具体的には、複雑領域において非線形項を伴う楕円型方程式の正值解に対する境界付近での増大評価、関数の変化を抑制するハルナック型不等式、非接境界極限の存在、ヘルダー連続な解に対する除去可能集合の特徴付け、半線形熱方程式の解の特異点の除去可能性、熱核の大域的評価に関する結果を得た。

研究成果の概要(英文)：We have investigated, from the point of view of potential theory, some relationships among geometric properties of domains, nonlinearity of equations and properties of solutions of nonlinear partial differential equations. In nonsmooth domains, we obtained several results concerning a boundary growth estimate, a Harnack type inequality, the existence of nontangential limits, a characterization of removable sets for Holder continuous solutions of semilinear elliptic equations, a removability theorem for semilinear heat equations and a sharp global estimate of the heat kernel.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：ポテンシャル論 偏微分方程式 実解析 複素解析

### 1. 研究開始当初の背景

領域が球や全空間の場合は常微分方程式の方法が適用でき、半線形楕円型方程式の正値解の存在や性質に関する結果が数多く発表されてきた。さらに、滑らかな境界をもつ領域へ議論を発展させることも可能である。しかし、境界が滑らかでないリプシッツ領域やフラクタル集合を境界にもつような複雑領域においては殆ど研究されていない。ポテンシャル論研究では、領域の形状により解の挙動が如何に影響されるかを解明することにも関心がある。調和関数の境界挙動および質量分布とそのポテンシャルの境界挙動の関係については、単位円板から始まり近年では一様領域などの複雑領域においても研究され、その研究から様々な興味深い性質が見出されてきた。しかし、これらの結果は、調和関数やポアソン方程式の解を対象としていたため半線形楕円型方程式のすべての解には適用できない。従って、半線形楕円型方程式の解の境界挙動および性質については未解決な問題が多くある。また、熱方程式に関してはリプシッツ領域のように内部円錐条件と外部円錐条件が満たされる領域においては熱測度の2倍条件に基づく方法を用いて境界付近での解の評価や積分表現が示されてきた。しかし、より複雑な領域では熱測度の2倍条件は成立せず、新たな解析方法が求められている。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、ラプラス方程式や熱方程式のような基礎方程式の研究も含め、非線形項を伴う楕円型・放物型偏微分方程式の正値解の境界挙動および性質が非線形性と領域の複雑さに如何に影響されるかをポテンシャル論の観点から詳しく調べることである。具体的には、複雑領域において半線形楕円型方程式の正値解の境界増大度と非線形指数の関係、ファトゥ型境界極限定理とその接近領域の最良性に関するリトルウッド型定理、ナイム・ドゥーブ型境界極限定理の確立、熱方程式に関しては時間に依存して変化する複雑領域において解の境界付近での評価や積分表現の確立、それらの半線形熱方程式への応用である。

### 3. 研究の方法

(1) ポテンシャル論に関する結果・証明方法を整理し半線形楕円型・放物型方程式への展開を試みた。特に、滑らかな領域で得た結果の証明の本質部分を確認し、複雑領域におけるグリーン関数とマルチン核の挙動の関係に注意して適当な非線形指数を与え境界挙動の研究を進めた。

(2) 国内の研究集会、シンポジウム、セミナーなどに参加し、最新の研究成果に関する情報収集を行ったり、結果や証明方法に関する意見交換を行ったり、研究成果の発表を行いながら効率良く研究活動を進めた。

### 4. 研究成果

(1) 複雑領域上の半線形楕円型方程式の正値解の境界挙動に関して次のことを明らかにした。非線形指数がグリーン関数の境界減衰度によって定まる定数以下ならば、すべての正値解は正値調和関数と同様の境界増大度をもつことを示し、平均値不等式に関する結果やハルナック型不等式が成り立つことがわかった。また、ナイム・ドゥーブ型境界極限定理として、2つの正値解の比に対する非接極限の存在を明らかにした。

一方で単独の正値解に対するファトゥ型非接境界極限定理とその接近領域の最良性に関するリトルウッド型定理を与えた。単独の解に対する結果と比に対する結果では非線形指数の範囲が異なることがわかった。

(2) 半線形楕円型方程式の解の拡張について研究した。空間次元を  $n$  とするとき、ハウスドルフ次元が  $n-2$  次元より大きい集合は極集合でないため、ポテンシャル論における古典的な拡張定理は適用できない。しかし、掃散の議論をうまく使うことで、すべてのヘルダー連続な解が全体に拡張可能であるための除去可能集合に対する必要十分条件は  $n-2+$  次元ハウスドルフ測度が  $0$  であることを明らかにすることができた。これは調和関数の場合に得られたカーレソンの結果の拡張である。

(3) 複素空間内の単位球上のベルグマン計量に関するラプラス・ベルトラミ方程式について研究した。特に、或る範囲の非線形指数に対して非線形不等式を満たすすべてのグリーンポテンシャルが満たすべき境界付近の増大評価を与え、ハルナック不等式を示し、コロナ型境界極限定理を証明した。この方程式に関しては極小尖細性や極小細極限について不明なことが多い。これらに関する理論を構築すればさらに良い結果が期待できる。

(4) 有界リプシッツ領域において熱核の大域的評価を与えた。ラプラス方程式のグリーン関数の大域的評価を得るためには2点によって定まる補助集合が必要であったが、熱核の場合は1点ごとに補助集合を考えなければならないことがわかった。その結果、従来のデータベースによる評価より良い評価を得ることができた。さらに、この評価を用いて、半線形熱方程式の正値解の境界付近の増大度に関する評価を与えた。

(5) 半線形熱方程式の解の特異点の除去可能性について研究した。近年、スーヤフィーにより熱方程式の解の孤立特異点の除去可能性に関する結果が得られたが、解の積分表現やシャウダー評価、最大値原理に基づく証明であったため、非線形項を伴う場合には適用できなかった。この問題では特異点集合が小さいので古典的なポテンシャル論の結果が適用できることに着目し、半線形熱方程式の解の特異点の除去可能性を比較的容易な方法で証明した。

(6) 放物型ジョーン領域や放物型一様領域を導入し、放物型ハルナック不等式とドーマーの議論を改良して熱方程式の正值解に対するカーレソン型評価と境界付近での比較評価を証明した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

K. Hirata, Removable singularities of semilinear parabolic equations, Proceedings of the American Mathematical Society, 査読有, Vol. 142, (2014), 157-171  
DOI:10.1090/S0002-9939-2013-11739-9

K. Hirata, Two sided global estimates of heat kernels in Lipschitz domains, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, Vol. 43, (2013), 29-45  
[URL:http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu-j.html](http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu-j.html)

K. Hirata, Admissible boundary limits of Green potentials satisfying nonlinear inequalities in the unit ball of  $C^n$ , Topics in Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis, 査読有, (2013), 111-121

K. Hirata, Boundary behavior of superharmonic functions satisfying nonlinear inequalities in uniform domains, Transactions of the American Mathematical Society, 査読有, Vol. 363, (2011), 4007-4025  
DOI:10.1090/S0002-9947-2011-05071-3

K. Hirata, Removable sets for continuous solutions of semilinear elliptic equations, Manuscripta Mathematica, 査読有,

Vol. 135, (2011), 245-262  
DOI:10.1007/s00229-011-0440-2

K. Hirata, Properties of superharmonic functions satisfying nonlinear inequalities in nonsmooth domains, Journal of the Mathematical Society of Japan, 査読有, Vol. 62, (2010), 1043-1068  
URL:<http://projecteuclid.org/euclid.jmsj/1288703096>

[学会発表](計12件)

平田賢太郎, Removable singularities of solutions of semilinear heat equations, 第100回熊本大学応用解析セミナー, 2013年11月9日, 熊本大学

K. Hirata, Removable singularities of solutions of semilinear heat equations, 3<sup>rd</sup> Italian-Japanese Workshop on Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, 2013年9月3日, 東京工業大学

平田賢太郎, Removable singularities of solutions of semilinear heat equations, 2013年度ポテンシャル論研究集会, 2013年8月29日, 北海道大学

平田賢太郎, 熱方程式の除去可能な特異点に関する Hsu の結果のポテンシャル論的証明, 北海道大学月曜解析セミナー, 2013年7月22日, 北海道大学

平田賢太郎, 非線形不等式を満たす優調和関数の境界挙動, 広島大学数学教室談話会, 2013年4月23日, 広島大学

平田賢太郎, 熱方程式の除去可能な特異点に関する Hsu の結果のポテンシャル論的証明, 第7回なかもず解析セミナー, 2012年11月30日, 大阪府立大学

K. Hirata, Heat kernel estimates and growth estimates of solutions of semilinear heat equations, RIMS workshop: Potential Theory and its Related Fields, 2012年9月7日, 京都大学

K. Hirata, Admissible boundary limits of Green potentials satisfying

nonlinear inequalities in the unit  
ball of  $C^n$ ,  
The 19<sup>th</sup> International Conference  
on Finite or Infinite Dimensional  
Complex Analysis and Applications,  
2011年12月14日, 広島アステールプラ  
ザ

平田賢太郎, 非線形不等式を満たす優調  
和関数に対する非接極限定理,  
2011年度ポテンシャル論研究集会,  
2011年11月4日, 岐阜大学

平田賢太郎, Lipschitz 領域において非  
線形不等式を満たす正值優調和関数に対  
する Carleson 評価について,  
北海道大学月曜解析セミナー,  
2011年9月26日, 北海道大学

平田賢太郎, 非線形不等式を満たす優調  
和関数の非接極限定理と Carleson 評価,  
第46回函数論サマーセミナー,  
2011年9月13日, かんぼの宿別府

平田賢太郎, 半線形楕円型方程式の解の  
連続性と除去可能集合の関係,  
2010年度ポテンシャル論研究集会,  
2010年11月6日, 大分大学

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

平田 賢太郎 (HIRATA KENTARO)  
広島大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号: 30399795